# Ejercicios de Introducción

Análisis Matemático 1

FCFM-UMSNH

1. Sea $X$ un conjunto, $A \subseteq X$ y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de $X$. Demostrar que:

   (a) $A \cap \bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}$,

   (b) $A \cup \bigcap \mathcal{F} = \bigcap \{A \cup F : F \in \mathcal{F}\}$.

2. Recuerde que si $f$ y $g$ son dos funciones entonces se define la composición de ellas como

$$g \circ f = \{\langle x, z\rangle : (\exists y)\left(\langle x, y\rangle \in f \ \& \ \langle y, z\rangle \in g\right)\}.$$

   Si $f$, $g$ y $h$ son funciones, demuestre que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

3. Sean $f : X \to Y$, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Demostrar que:

   (a) $f\left[f^{-1}[B]\right] \subseteq B$,

   (b) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$.

   Dar ejemplos donde las contenciones sean propias.

4. Sean $g : X \to Y$ y $f : Y \to Z$. Demostrar que:

   (a) Si $A \subseteq Z$, entonces $(f \circ g)^{-1}[A] = g^{-1}\left[f^{-1}[A]\right]$.

   (b) Si $f$ y $g$ son inyectivas $f \circ g$ es inyectiva y $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

   (c) Si $f \circ g$ es inyectiva, ¿qué se puede decir de la inyectividad de $f$ y de $g$?

   (d) Si $f$ y $g$ son sobreyectivas, entonces $f \circ g$ es sobreyectiva.

   (e) Si $f \circ g$ es sobreyectiva, ¿qué se puede decir de la sobreyectividad de $f$ y de $g$?

   (f) ¿Puede $f \circ g$ ser biyectiva sin que $f$ y $g$ sean biyectivas?

5. Sea $f : X \to Y$. Demostrar que $f$ es inyectiva si y sólo si $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$, para todo par $A, B \subseteq X$.

6. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ dos funciones tales que $g$ no es una función constante. Demostrar que existen subconjuntos no vacíos $X_1,\ X_2,\ Y_1$ y $Y_2$ tales que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, $f[X_1] = Y_1$ y $g[Y_2] = X_2$.

7. Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$ y $a \in \mathbb{R}$ una cota superior de $X$. Demostrar que $a = \sup X$ si y sólo si $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in X)(a - \varepsilon < x \leq a)$.

8. Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$ y $a \in \mathbb{R}$ una cota inferior de $X$. Demostrar que $a = \inf X$ si y sólo si $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in X)(a \leq x < a + \varepsilon)$.

9. Demostrar que si $X \subseteq \mathbb{R}$ no es vacío y es acotado superiormente, entonces $-X$ es acotado inferiormente y $\sup X = -\inf(-X)$.

10. Sean $\emptyset \subset X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ tales que $Y$ es acotado superiormente. Demostrar que $\sup X \leq \sup Y$.

11. Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ tal que $a = \sup X$ y $t \geq 0$. Demostrar que $a \cdot t$ es el supremo del conjunto $tX = \{tx : x \in X\}$.

12. Sean $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ con $a = \sup X$ y $b = \sup Y$. Demostrar que $a + b = \sup(X + Y)$, donde $X + Y = \{x + y : x \in X \ \&\ y \in Y\}$.

13. Demostrar que $\mathbb{R}$ es el único campo ordenado completo en el siguiente sentido: Si $\widetilde{\mathbb{R}}$ es otro campo que satisface los mismos axiomas que $\mathbb{R}$ entonces existe una biyección $f : R \to \widetilde{\mathbb{R}}$ que satisface:

    (a) i. $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$,
        ii. $f(xy) = f(x) f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$,
        iii. $x < y$ si y sólo si $f(x) < f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

    (Sugerencia: Muestre que existe $N \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ que es el respectivo conjunto de los números enteros positivos de $\widetilde{\mathbb{R}}$ y que tiene la forma $N = \left\{\widetilde{1}, \widetilde{2}, \widetilde{3}, \widetilde{4}, \ldots\right\}$ defina

$$Q = \left\{\frac{p}{q} : p \in N \cup -N \cup \{0\} \ \&\ q \in N\right\}.$$

    Defínase $g : \mathbb{Q} \to Q$ por $g\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\widetilde{p}}{\widetilde{q}}$ y $f : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ por

$$f(x) = \sup\{g(r) : r < x \ \&\ r \in \mathbb{Q}\}.$$

    Muestre que $f$ tiene las propiedades enunciadas.)

14. Demuestre que cualquier espacio vectorial tiene una base.

15. Supóngase que $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos no vacíos de $X$ y supóngase que la intersección de cualquier subfamilia finita de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía. Demuéstrese que existe un familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos no vacíos de $X$ que contiene a $\mathcal{F}$, que también las intersecciones de subfamilias finitas de $\mathcal{U}$ no son vacías y con la propiedad de que si $A \in \wp(X) \setminus \mathcal{U}$, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \cap U = \emptyset$.

16. Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado sin elementos maximales, demuestre que existe un subconjunto $Y$ de $X$ que es linealmente ordenado por $\leq$ y que es no acotado en $(X, \leq)$; es decir, no existe $x \in X$ tal que $y \leq x$ para cada $y \in Y$.

17. Sea $\mathcal{A}$ una subfamilia infinita de $\wp(\omega)$ tal que para cada par $A, B \in \mathcal{A}$ se tiene que si $A \neq B$ entonces $A \cap B$ es un conjunto finito. Demuestre que existe $\mathcal{B} \subseteq \wp(\omega)$ con la propiedad de que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, también para cada par $A, B \in \mathcal{B}$ se tiene que si $A \neq B$ entonces $A \cap B$ es un conjunto finito y para cada $D \subseteq \omega$ que es infinito, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \cap D$ es un conjunto infinito.

18. Sean $(X, \leq)$ y $(Y, \preceq)$ dos conjuntos bien ordenados y sea $f : X \to Y$ una biyección creciente (i.e. $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$). Demuestre que $f$ es única.

19. Sea $(X, \leq)$ un conjunto bien ordenado. Considere el orden en el conjunto $X \times X$ definido por: Sean $\langle x_0, y_0 \rangle$ y $\langle x_1, y_1 \rangle$ dos puntos de $X \times X$ y sea $\max\{x_0, y_0\} \neq \max\{x_1, y_1\}$. Si $\max\{x_0, y_0\} < \max\{x_1, y_1\}$ entonces póngase $\langle x_0, y_0 \rangle < \langle x_1, y_1 \rangle$ . Si $\max\{x_0, y_0\} = \max\{x_1, y_1\}$ entonces póngase $\langle x_0, y_0 \rangle < \langle x_1, y_1 \rangle$ si o bien $x_0 < x_1$ o $(x_0 = x_1 \ \& \ y_0 < y_1)$. En los casos restantes póngase $\langle x_1, y_1 \rangle < \langle x_0, y_0 \rangle$ .

    Demuéstrese $(X \times X, \leq)$ es un conjunto bien ordenado.

20. Demostrar que el conjunto de los enteros pares es numerable.

21. Supóngase que $X$ y $Y$ son conjuntos equipotentes. Demostrar que $\wp(X) \approx \wp(Y)$ .

22. Supóngase que $A$ y $B$ son conjuntos ajenos. Demuestre que para cualquier conjunto $X$ se tiene que $X^{A \cup B}$ es equipotente a $X^A \times X^B$.

23. Demostrar que todo conjunto infinito tiene un subconjunto infinito numerable.

24. Demostrar que si $X$ es un conjunto infinito, entonces existe un buen orden sobre $X$ de tal modo que $X$ con este orden no tiene máximo.

25. Un buen orden $\leq$ sobre un conjunto $X$ se llama *minimal* si para cualquier otro buen orden $\preceq$ sobre $X$ existe una inyección creciente $f : (X, \leq) \to (X, \preceq)$. Demuestre que todo conjunto infinito posee un buen orden minimal.

26. Demuestre que si $X$ es un conjunto infinito y $\leq$ es un buen orden minimal sobre $X$, entonces $X$ no tiene último elemento con respecto a este orden.

27. Sea $X$ un conjunto y $2^X$ el conjunto de todas las funciones $f : X \to \{0, 1\}$. Demostrar que $\wp(X) \approx 2^X$.

28. Demostrar que $X$ es infinito si y sólo si $X$ es equipotente a un subconjunto propio de $X$.

29. Sean $A$ un conjunto numerable y $B$ un conjunto no numerable. Demostrar que $A \cup B$ y $B \setminus A$ son conjuntos no numerables.

30. Demostar que si $A \subseteq B$ y $A$ no es numerable, entonces $B$ no es numerable.

31. Demostrar que si $A$ y $B$ son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es un conjunto numerable.

32. Demostrar que el conjunto de todos los polinomios de grado $n$ con coeficientes racionales es un conjunto numerable.

33. Demostrar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es un conjunto numerable.

34. Recuerde que un $r \in \mathbb{R}$ se llama número *algebraico* si $r$ es raíz de un polinomio con coeficientes enteros. Si $r \in \mathbb{R}$ no es algebraico se llama *trascendente*. Demostrar que el conjunto de los números algebraicos es numerable y deduzca que existen los números trascendentes.

35. ¿Cuál es la cardinalidad de todos los subconjuntos infinitos de $\omega$?

36. ¿Cuál es la cardinalidad del conjunto de todas las funciones inyecticas de $\omega$ en $\omega$?

37. ¿Cuál es la cardinalidad de todas las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?