Cálculo diferencial en una variable

Cálculo diferencial en una variable

J. Juan Angoa Amador
Jaime Arroyo García
Agustín Contreras Carreto
David Herrera Carrasco
Manuel Ibarra Contreras
Raúl Linares Gracia
Fernando Macías Romero
Armando Martínez García
Celestino Soriano Soriano
Fernando Velázquez Castillo.

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico–Matemáticas
Dirección General de Fomento Editorial

Primera Edición, 2005
ISBN: 968 863 817

Dirección General de Fomento Editorial
2 Norte 1404
Puebla, Pue.
Teléfono y fax 2 46 85 59

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

A los caídos en la gestación
de estas páginas y a los
que caerán por su lectura

PROLEGÓMENO

Este libro es el resultado de dos grandes impulsos: el trabajo colectivo y la amistad. Hace años un grupo de profesores inició los trabajos de discusión y preparación de lo que sería el material del curso de Cálculo I de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la UAP, sin más pretensiones que las de entender mejor este curso y preparar ejemplos y ejercicios comunes. Luego nos llegó la masificación de la enseñanza, cosa ahora extraña para casi todos, y lograr diseñar material de trabajo para los estudiantes fue un objetivo importante de los profesores. Así que éste, otrora material de discusión, se fue convirtiendo en apuntes, notas y finalmente libro. El material que se presenta aquí sigue siendo el que se tenía en la versión más antigua del libro de Cálculo I, que a su vez se usó en las licenciaturas de Computación, Electrónica, Física y Matemáticas para el curso en común del mismo nombre. Los cambios son mínimos ya que aparte del interés histórico hay un gran peso sentimental. Los temas son clásicos; sin embargo la presentación de éstos es original y por su génesis este libro resultará útil para toda persona que desee aprender cálculo diferencial y no sólo la evaluación de derivadas. En este libro los conceptos y no las técnicas manipuladoras, son los personajes principales. Los autores agradecen infinitamente la disposición de Luis Alberto Torres Ramírez, quien con gran ahínco capturó el manuscrito para darle una presentación moderna para su publicación. Por supuesto, todos los errores que aún se encuentren son de la entera responsabilidad de *La Comisión*.

ATENTAMENTE
La comisión

J. Juan Angoa Amador
Jaime Arroyo García
Agustín Contreras Carreto
David Herrera Carrasco
Manuel Ibarra Contreras
Raúl Linares Gracia
Fernando Macías Romero
Armando Martínez García
Celestino Soriano Soriano
Fernando Velázquez Castillo

Índice General

Capítulo 1

SUCESIONES

§1

1.1 Introducción

Uno de los principales problemas del Cálculo, consiste en estudiar situaciones en las que tenemos relacionadas dos funciones tales, que las imágenes de unas de ellas son las razones de cambio de las imágenes de la otra. Por ejemplo, tanto la velocidad como la distancia recorrida por un cuerpo, pueden considerarse como funciones del tiempo, pero la velocidad es la razón de cambio de la distancia. Análogamente, la aceleración puede considerarse como la razón de cambio de la velocidad. Tendremos oportunidad de profundizar en estas cuestiones en el Capítulo 3 y por eso ahora sólo pondremos unos ejemplos. Supongamos que la posición de un coche que se dirige al Este por una carretera recta, se puede determinar por la distancia a que se encuentra de una posición inicial. Esta distancia depende del tiempo. Denotemos la distancia por $d(t)$, donde t es el tiempo que ha transcurrido desde el momento en que el automóvil emprendió su recorrido. La *velocidad media* del carro durante algún intervalo de tiempo determinado, se puede calcular dividendo la distancia recorrida en ese intervalo de tiempo, entre la duración de dicho intervalo. Esto expresado en una fórmula, queda:

$$\text{velocidad media} = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{1.1}$$

donde t_2 y t_1, son los tiempos (contados desde el momento de la partida) iniciales y finales del intervalo de tiempo y $d(t_2)$ y $d(t_1)$ son las distancias que, desde el punto de partida, ha recorrido el automóvil en los tiempos inicial y final del intervalo. A veces, la velocidad realmente interesante no es la media, sino la *velocidad instantánea*. Supongamos, por ejemplo, que el auto choca; para los ocupantes o para los policías puede ser de vital importancia conocer la velocidad en el instante del siniestro y no la velocidad media durante los diez minutos previos y tal vez ni siquiera durante los 10 segundos anteriores a la colisión, durante los cuales es posible que se aplicaran los frenos violentamente. Para intentar conseguir una fórmula para la velocidad instantánea, puede ocurrírsele a usted, mi estimado lector, considerar un intervalo de tiempo de duración nula, esto es, hacer $t_2 = t_1$ en (1.1). Puesto que la distancia recorrida por el coche durante un intervalo de tiempo de duración 0 es 0, la ecuación (1.1) toma la forma

$$\frac{0}{0},$$

pero huelga hacer hincapié en el hecho de que esta expresión carece de sentido. Tomando $t_2 - t_1$ pequeño, podemos calcular la velocidad media durante un intervalo de tiempo tan corto como queramos y es intuitivamente claro que la velocidad instantánea en el instante t_1, por ejemplo, se parece más a la velocidad media en el intervalo $[t_1, t_2]$ (o $[t_2, t_1]$) cuando $t_2 - t_1$ es chico que cuando $t_2 - t_1$ es grande; así que atraparemos esa velocidad instantánea a partir de las velocidades medias durante intervalos de tiempo sumamente chiquitos y esto nos lleva a la búsqueda del límite para valores muy pequeños de $t_2 - t_1$.

En Geometría aparece el concepto de límite de manera más poderosa. Así, si en un círculo de radio r inscribimos un polígono regular de n lados, éste tendrá por área:

$$A_n = n\,\frac{r^2}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

En efecto: el área del triángulo OAB es:

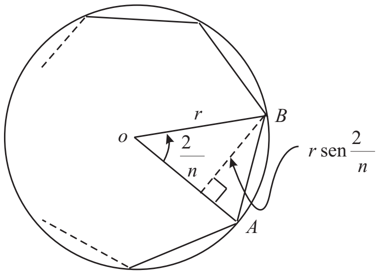


Figura 1.1

$$\frac{r(r\mathrm{sen}\frac{2\pi}{n})}{2} = \frac{r^2}{2}\mathrm{sen}\frac{2\pi}{n}$$

Como hay n de estos triángulos, el área del polígono es:

$$A_n = n\left(\frac{r^2}{2}\mathrm{sen}\frac{2\pi}{n}\right)$$

Aunque no tengamos un concepto riguroso de área, podemos aceptar que entre más lados tenga un polígono, su área se parece más al área del círculo y que entonces se puede ver como el límite de las áreas $A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6, \ldots$

Podemos también aproximarnos al perímetro de una circunferencia de radio r por polígonos regulares inscritos en ella.

El propósito de este Capítulo es explicar lo que se entiende por el límite de una sucesión, así como el propósito del siguiente capítulo será explicar el concepto de límite de una función (de variable continua).

§2

1.2 Sucesiones

Podemos entender una sucesión como una lista interminable de números reales (no necesariamente distintos) dispuestos en un orden determinado.

Por ejemplo, la lista de los números pares

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10, \ldots\ ,$$

es una sucesión.
También forman una sucesión los números a_1, a_2, a_3, $a_4, \ldots$, en donde $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n$. La lista en este caso se ve así:

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots$$

Debemos notar que una sucesión no es simplemente un conjunto de números: si se cambian de orden los elementos de un conjunto, éste sigue siendo el mismo. En una sucesión, en cambio, el orden es importante pues si se cambian de orden todos o algunos de sus términos, se obtiene una nueva sucesión que es diferente a la original. Así, la sucesión

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11, \ldots\ ,$$

es diferente a la sucesión

$$1,\ 3,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11,\ 10,\ 12, \ldots$$

De la misma manera la sucesión

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots\ ,$$

es diferente a la sucesión

$$-1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1, \ldots$$

En estas últimas sucesiones se usan solamente dos números, -1 y 1 (que se repiten muchísimas veces, por supuesto); así que el conjunto de números que se use para formar una sucesión no tiene por qué ser infinito.

Una sucesión se puede especificar de diversas formas. Por ejemplo:

a) Se puede dar una lista de los primeros términos de la sucesión usando puntos suspensivos para sugerir que la sucesión continúa generándose de un modo ya claro, como en el caso de las sucesiones siguientes :

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13, \ldots$
$5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 35, \ldots$
$3,\ 9,\ 27,\ 81, 81, 243, \ldots$
$1,\ -3,\ 0,\ -2,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{5}{4},\ -\frac{7}{8},\ -\frac{9}{8}, \ldots$
$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81, \ldots$
$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34, \ldots$

b) En ocasiones se puede hallar una fórmula que proporcione todos los términos de la sucesión; así, los términos de la sucesión de los pares tienen por fórmula $a_n = 2n$ $(n \in \mathbb{N})$
También la sucesión

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6}, \ldots$$

responde a la fórmula

$$b_n = \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

y la sucesión

$$\frac{1}{2},\ 4,\ \frac{1}{8},\ 16,\ \frac{1}{32},\ 64,\ \frac{1}{128}, \ldots\ ,$$

que es la misma que:

$$\frac{1}{2},\ 2^2,\ \frac{1}{2^3},\ 2^4,\ \frac{1}{2^5},\ 2^6,\ \frac{1}{2^7}, \ldots\ ,$$

tiene por fórmula

$$c_n = 2^{(-1)^n n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para esta sucesión podría darse una regla para los términos pares y otra para los impares, de la siguiente forma:

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \\ 2^n & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Hay veces en que la fórmula general que representa a alguna sucesión está dada en forma de suma. Por ejemplo la sucesión

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + 2, \quad a_3 = 1 + 2 + 3,$$

$$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4, \ldots$$

se representa por la fórmula:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

La fórmula general

$$b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

representa a la sucesión cuyo primer término es $b_1 = 1 + \frac{1}{1!} = 2$, cuyo segundo término es $b_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$, cuyo tercer término es $b_3 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$ y en general, el n–ésimo término es, como la fórmula lo indica, la suma

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

¡y no solamente el sumando $\frac{1}{n!}$!

También una fórmula general puede estar dada en forma de producto. Por ejemplo:

$$a_n = n! \;\; \forall n \in \mathbb{N} \qquad (\text{recordar que } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)$$

o

$$b_n = \left(1 - \tfrac{1}{n+1}\right)\left(1 - \tfrac{2}{n+1}\right)\left(1 - \tfrac{3}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \tfrac{n}{n+1}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En el primer caso

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad a_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$

$$a_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \ldots$$

y en el segundo caso,

$$b_1 = \left(1 - \frac{1}{1+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right),$$

$$b_2 = \left(1 - \frac{1}{2+1}\right)\left(1 - \frac{2}{2+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right),$$

$$b_3 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{2}{4}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\right), \ldots$$

Aunque sería muy útil que cualquier sucesión se pudiera representar mediante una fórmula general expresable como regla algebraica, éste no es el caso para la sucesión cuyos términos son los dígitos que aparecen en el desarrollo decimal de π:

$$3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, \ldots$$

ni para la sucesión de los números primos por orden de magnitud $1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$

c) En algunas ocasiones es muy díficil obtener, de la simple observación de los términos de una sucesión, una fórmula general que nos diga cuál es su n–ésimo término (para cada $n \in \mathbb{N}$). Por ejemplo, la "sucesión de Fibonacci":

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

tiene por complicada fórmula general

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

(ver problema 7 de esta sección).

O a veces la fórmula general, aunque sea sencilla de descubrir, es muy engorroso escribirla. Por ejemplo: la sucesión

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \ldots$$

tiene por fórmula general:

$$a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}} \ \ (n \text{ radicales }) \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

En ambos casos es muy sencillo percatarse de que cada término se puede ir generando a partir de los términos anteriores, de una manera muy simple. Así, en la sucesión de Fibonacci, cada término es la suma de los dos términos anteriores, una vez dados los dos primeros términos:

$$1,\ 1,\ 2=1+1,\ 3=1+2,\ 5=2+3,\ 8=3+5,\ 13=5+8,\ldots$$

Podemos entonces representar F_n mediante una *fórmula de recurrencia*, del siguiente modo:

$$F_n = \begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1} & \text{para } n \geq 3. \end{cases}$$

Fórmulas como éstas se llaman **fórmulas de recurrencia** porque expresan cada término en función de sus precedentes (diciéndonos cómo obtener cada término recurriendo a los anteriores). La fórmula de recurrencia de carácter más general tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1,\ a_2,\cdots,a_{n_0} & \text{están dados} \\ a_n = F(a_{n-1},\ a_{n-2},\cdots,\ a_2,\ a_1) & \text{para } n > n_0 \end{cases}$$

donde F es una función que depende de los valores que adopten los números $a_1,\ldots,a_{n-1}$.

A las sucesiones que están expresadas mediante fórmulas de recurrencia, suele llamárseles **sucesiones recurrentes**.

Las fórmulas de recurrencia son muy usadas en los procesos iterativos para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones de la forma:

$$f(x) = 0.$$

La idea de este “método de aproximaciones sucesivas” es comenzar con una conjetura aproximada a la solución e irla refinado mediante un procedimiento muy sencillo (una fórmula de recurrencia), hasta alcanzar el grado de exactitud deseado. Por ejemplo el método de Newton para resolver ecuaciones del tipo

$$x^2 - A = 0, \quad \text{con } A \geq 0,$$

o sea para encontrar raíces cuadradas, consiste en lo siguiente:

Si $A \geq 0$ es un número cuya raíz cuadrada se quiere conocer y a_1 es cualquier número, podemos construir una sucesión de números

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots,$$

que como se verá en la Sección 1.4, son cada vez más cercanos a la solución $\sqrt{A}$, de la siguiente forma:

Dado a_1, el término a_2 se obtiene así:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right) \qquad \left(\text{promedio de } a_1 \text{ y } \frac{A}{a_1}\right).$$

El término a_3 será:

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{A}{a_2}\right).$$

En general,

$$a_n = \tfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \tfrac{A}{a_{n-1}}\right) \quad \text{para } n \geq 2.$$

Así, para calcular $\sqrt{10}$ (con 3 cifras decimales), podemos comenzar con el valor $a_1 = 3$: la fórmula de recurrencia para

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

es en este caso

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \tfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \tfrac{A}{a_{n-1}}\right) \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

y los primeros términos de la sucesión son:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3 & & \\
a_2 &= \tfrac{1}{2}(3 + \tfrac{10}{3}) = & & 3.167 \\
a_3 &= \tfrac{1}{2}\left(3.167 + \tfrac{10}{3.167}\right) = & & 3.162 \\
a_4 &= \tfrac{1}{2}\left(3.162 + \tfrac{10}{3.162}\right) = & & 3.162 \\
&\vdots & & \vdots
\end{aligned}$$

La eficacia del método de Newton está basada en estas dos ideas:

a) El promedio $\dfrac{1}{2}(u+v)$ entre dos números u y v está entre ellos y

b) Si $u > \sqrt{A}$, entonces $v = \dfrac{A}{u} < \sqrt{A}$ y viceversa. Para ver esto notemos que $u > \sqrt{A}$ implica $\dfrac{1}{u} < \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ y como $A > 0$,

$$\frac{A}{u} < \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}.$$

De esta manera, si a_n es una aproximación a $\sqrt{A}$, entonces tanto

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right)$$

como $\sqrt{A}$ están entre a_n y $\dfrac{A}{a_n}$ y por lo tanto a_{n+1} está más cerca de $\sqrt{A}$ que a_n.

Ejercicios 1.

1. Escriba los 5 primeros términos de las sucesiones:

a) $a_n = n(n+1)$, b) $a_n = (-1)^n + n$,

c) $b_n = (-1)^n n$, d) $a_1 = 3$, $a_n = 3 + \frac{a_{n-1}}{10}$ para $n \geq 2$,

e) $d_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, f) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$,

g) $a_n = \frac{2n+1}{n^2}$, h) $b_n = \sqrt{n} + 1$,

i) $c_n = (-1)^n n(n+1)$, j) $l_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{n}$,

k) $a_1 = 1$, $a_{k+1} = \frac{2}{3}a_k$, $k \in \mathbb{N}$, l) $m_1 = 0$, $m_{k+1} = \sqrt{1 + m_k}$, $k \in \mathbb{N}$,

m) $p_1 = 1$, $p_{i+1} = 9 - p_1$, $i \in \mathbb{N}$, n) $k_1 = 1$, $k_n = \frac{k_{n-1}}{n}$, $n \geq 2$,

ñ) $\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 4 \\ a_n = \frac{1}{4}(a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4}),\ n \geq 5. \end{cases}$

2. Hallar fórmulas generales que especifiquen las siguientes sucesiones:

   a) $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

   b) $0.4, 0.44, 0.444, 0.4444, \ldots$

   c) $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$

   d) $1, -3, 0, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{8}, -\frac{9}{8}, \ldots$

3. Dadas las siguientes sucesiones recurrentes, hallar una fórmula general que las represente

   a) $a_1 = -1, \ a_n = (-1)a_{n-1}, \ n \geq 2,$

   b) $a_1 = \frac{1}{2}, \ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}, \ n \geq 2,$

   c) $c_1 = \frac{3}{10}, \ c_{n+1} = c_n + \frac{1}{3^{n+1}}$, para $n \in \mathbb{N}$,

   d) $a_1 = 0, \ a_n = \frac{1}{2-a_{n-1}}, \ n \geq 2.$

4. Escribir de manera recurrente las sucesiones:

   a) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$

   b) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!},$

   c) $b_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}},$

   d) $0.4, 0.44, 0.444, 0.4444, 0.44444, \ldots$

5. Si una sucesión tiene la fórmula de recurrencia $\begin{cases} a_1 \\ a_n = F(a_{n-1}) \end{cases}$ donde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función.

   a) Demuestre que $a_3 = F(F(a_1))$

   b) Escribir la fórmula que da a_4 en términos de a_1

c) Escribir la fórmula que da a_{10} en términos de a_8

d) Escribir la fórmula que da a_n en términos de a_k, donde $1 \leq k < n$.

6. Un banco ofrece a sus clientes una tasa de interés de $r\%$ anual. Una persona deposita cierta cantidad de dinero y la deja en el banco durante varios años. Si el total de dinero que tiene acreditado a su cuenta al cabo de n años es $\$a_n$, escribir una fórmula de recurrencia para la sucesión $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$

7. Demuestre que una fórmula general para la sucesión de Fibonacci es
$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad a_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$
(Sugerencia: demuestre que $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ y que para $n \geq 3$ se tiene $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$).

§3

1.3 Sucesiones monótonas y acotadas

Aunque para nosotros ha sido suficiente entender una sucesión como una lista interminable de números reales dispuestos en un orden determinado, será también útil aclarar que el concepto formal de sucesión es el siguiente:

Definición 1.3.1 Una sucesión es una función
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Es lo mismo entonces hablar de una sucesión como función o como lista interminable. En efecto, dada una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, podemos construir la lista ordenada de números:
$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ \ldots$$

y viceversa, dada una lista interminable de números reales,

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots$$

podemos definir una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con la regla

$$f(n) = a_n \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En general, cuando hablemos de una sucesión $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$, escribiremos: "la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$"
Por ejemplo, para hablar de la sucesión $2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32, \ldots, 2^n, \ldots$, escribiremos: "la sucesión $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$".

Nota: Si $N \in \mathbb{N}$, $A = \{n \in \mathbb{N} : n > N\}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función, esta última se puede considerar como una sucesión, a saber la sucesión: $f(N+1),\ f(N+2),\ f(N+3), \ldots$, o sea, la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $g(1) = f(N+1)$, $g(2) = f(N+2)$, $g(3) = f(N+3)$,..., $g(n) = f(N+n)$,...

Ejemplo: $f(n) = \dfrac{1}{n-3}$ para $n > 3$. Se puede considerar como la sucesión cuyo primer término es $a_1 = f(4) = 1$, el segundo término es $a_2 = f(5) = \frac{1}{2}$ y así sucesivamente, $a_n = f(3+n) = \frac{1}{n}$.

Para continuar, suplicamos al alumno que repase el concepto de función monótona (ya sea creciente o decreciente) en un subconjunto de $\mathbb{R}$, porque nuestra siguiente definición es un caso particular de tales conceptos.

Definición 1.3.2 Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es:
a) **creciente** (monótona creciente) si y sólo si

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n < m \Rightarrow a_n \leq a_m,$$

b) **estrictamente creciente** si y sólo si

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n < m \Rightarrow a_n < a_m,$$

c) **decreciente** (monótona decreciente) si y sólo si

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n < m \Rightarrow a_n \geq a_m,$$

d) **estrictamente decreciente** si y sólo si

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n < m \Rightarrow a_n > a_m.$$

Esta definición es equivalente, en el caso de las sucesiones, a ésta (ver ejercicio 7 de "Ejercicios 2"):

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es:*
a) creciente (monótona creciente) si y sólo si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq a_{n+1},$$

b) estrictamente creciente si y sólo si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < a_{n+1}.$$

c) decreciente (monótona decreciente) si y sólo si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq a_{n+1},$$

d) estrictamente decreciente si y sólo si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > a_{n+1}.$$

Ejemplos:

1. Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $a_n = n$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n < n+1 = a_{n+1}$, la sucesión es estrictamente creciente.

2. Sean $a_1 = 0.3$, $a_2 = 0.33$, $a_3 = 0.333$, $a_4 = 0.3333, \ldots$En general $a_n = \underbrace{0.33\ldots 33}$ (n veces).

   Como se ve, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{3}{10^{n+1}} > a_n$ y por eso $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, sea $a_n = \dfrac{1}{n}$. Entonces $\forall n \in N$, $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow a_{n+1} < a_n$. Así, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente.

4. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \alpha$, la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y decreciente, aunque no estrictamente, ya que $\forall n \in N$, $b_n = \alpha = b_{n+1}$ y por ende

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \leq b_{n+1} \quad \text{y} \quad b_n \geq b_{n+1}.$$

5. $a_n = 2n + (-1)^n$. Se tiene:
$a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 9, \quad a_5 = 9, \ldots$
A ojo de buen cubero, esta sucesión es creciente, pero no estrictamente, pues:

$$n \text{ par } \Rightarrow \begin{cases} a_n = 2n + 1 \\ a_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 2 - 1 = 2n + 1 = a_n \end{cases}$$

$$n \text{ impar } \Rightarrow \begin{cases} a_n = 2n - 1 \\ a_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 2 + 1 = 2n + 3 > a_n \end{cases}$$

6. Se considera la sucesión recurrente definida por

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} u_1 = 7 \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Esta sucesión es decreciente, ya que

$$u_2 = \sqrt{2 + u_1} = \sqrt{2 + 7} = 3 < u_1$$

y si suponemos que para alguna $n \geq 2$, $u_n < u_{n-1}$, entonces $2 + u_n < 2 + u_{n-1}$ y por consiguiente,

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} < \sqrt{2 + u_{n-1}} = u_n.$$

7. Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

claramente, $\alpha_1 = 2$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{1}{(n+1)!} > \alpha_n$. Por eso, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente.

8. Sea $\beta_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
Por el Teorema del binomio (de Newton),

$$\beta_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

En forma análoga,

$$\beta_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)+\cdots+$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)(1 - \frac{2}{n+1})\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Sea

$$r = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)(1 - \frac{2}{n+1})\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Si $1 \leq k \leq n-1$, entonces $0 < \frac{k}{n} < 1$ y por eso $r > 0$ y $0 < 1 - \frac{k}{n} < 1$. Además $1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}$, así que si comparamos término a término los desarrollos de β_n y β_{n+1}, se tendrá:

$$\begin{aligned}
\beta_n = \ & 1 + 1 + \tfrac{1}{2!}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{1}{3!}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\left(1 - \tfrac{2}{n}\right) + \cdots + \\
& + \tfrac{1}{n!}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\left(1 - \tfrac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \tfrac{n-1}{n}\right) < \\
& < 1 + 1 + \tfrac{1}{2!}\left(1 - \tfrac{1}{n+1}\right) + \tfrac{1}{3!}\left(1 - \tfrac{1}{n+1}\right)\left(1 - \tfrac{2}{n+1}\right) + \cdots + \\
& + \tfrac{1}{n!}\left(1 - \tfrac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \tfrac{n-1}{n+1}\right) < \\
& < 1 + 1 + \tfrac{1}{2!}\left(1 - \tfrac{1}{n+1}\right) + \tfrac{1}{3!}\left(1 - \tfrac{1}{n+1}\right)\left(1 - \tfrac{2}{n+1}\right) + \cdots + \\
& + \tfrac{1}{n!}\left(1 - \tfrac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \tfrac{n-1}{n+1}\right) + r \\
& = \beta_{n+1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente.

Otra manera de demostrar que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente es la siguiente:

Si $0 \leq a < b$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} &= \frac{(b-a)(b^n+b^{n-1}a+\cdots+ba^{n-1}+a^n)}{b-a} = \\
&= b^n+b^{n-1}a+\cdots+ba^{n-1}+a^n < \\
&< b^n+b^{n-1}b+\cdots+bb^{n-1}+b^n = \\
&= (n+1)b^n.
\end{aligned}$$

Despejando a^{n+1} en la anterior desigualdad, se tiene que

$$a^{n+1} > b^n[(n+1)a-nb].$$

Si $a = 1+\dfrac{1}{n+1}$ y $b = 1+\dfrac{1}{n}$, a y b satisfacen la condición $0 \leq a < b$ y por consiguiente:

$$\begin{aligned}
\left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} &> \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \left[(n+1)\left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)-n\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right] \\
&= \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

O sea,

$$\beta_{n+1} > \beta_n.$$

Pasemos ahora a estudiar las sucesiones acotadas.

Definición 1.3.3 La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está:

a) **acotada superiormente** si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq K,$$

b) **acotada inferiormente** si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq K,$$

c) **acotada** si está acotada tanto superior como inferiormente.

Ejemplos:

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = n$.

   Esta sucesión no está acotada superiormente ya que

   $$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > K$$

   (por la propiedad arquimediana).

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, sea $a_n = \begin{cases} a_1 = 0.3, \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{3}{10^{n+1}} & \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

   Notemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada pues $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq \dfrac{1}{3}$ y $a_n \geq 0$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, sea $a_n = \dfrac{1}{n}$. Esta sucesión está acotada debido a que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq a_n \leq 1$.

4. Toda sucesión constante es acotada.

5. Sean $a_n = 2n + (-1)^n$ y $K \in \mathbb{R}$. Escojamos una n par tal que $n > \dfrac{K-1}{2}$. Entonces

   $$a_n = 2n + 1 > \frac{2(K-1)}{2} + 1 = K.$$

   Por lo tanto, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente.

6. La sucesión recurrente

   $$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} u_1 = 7, \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}, & n \geq 2 \end{cases}$$

   está acotada inferiormente por 2, dado que

a) $u_1 = 7 > 2$ y

b) $u_n > 2 \Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} > \sqrt{2+2} = 2$

y estos dos pasos prueban, por inducción, que u_n está acotada inferiormente por 2.

Además $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $\therefore \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_1 = 7$. Por eso, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.

7. Si $\alpha_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdots n} \\
&\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{2^n-1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{2^n-1}{2^{n-1}} < 1 + 2 = 3.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.

8. Si $\beta_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también está acotada, pues:

$$\begin{aligned}
\beta_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \\
&+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \alpha_n < 3,
\end{aligned}$$

ya que $\forall k \in \{1, \cdots, n-1\},\ \ 0 < 1 - \frac{k}{n} < 1$.

Para otra demostración de que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente, usaremos la desigualdad

$$b^n[(n+1)a - nb] < a^{n+1} \qquad \text{para } 0 \leq a < b,$$

que probamos ya en la página (25). Si en ella sustituímos $a = 1$ y $b = 1 + \dfrac{1}{2n}$, queda

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \left[(n+1) - n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right] < 1, \qquad \text{o sea,}$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n < 1.$$

Por lo tanto $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n < 2$, elevando al cuadrado, queda

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y $n < 2n$, se tiene que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4.$$

Ejercicios 2.

1. Demostrar que las sucesiones siguientes son crecientes:

   a) $a_n = 2n^2 - 3n + 5$, *b*) $a_n = 3n^2 - 2n - 7$,

   c) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, *d*) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n}$,

   e) $a_n = n - \dfrac{1}{n}$.

2. Demostrar que:

   a) $a_n = 2^{\frac{1}{n}}$, b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
   c) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, d) $a_n = -n$,
   e) $a_n = x^n$ donde $0 < x < 1$.

3. De las siguientes sucesiones ¿cuáles son acotadas?, ¿cuáles son monótonas?, ¿cuáles son estrictamente crecientes o decrecientes?

   a) $a_n = (-1)^{n+1}$, b) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$,

   c) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$, d) $b_k = 1 - \dfrac{1}{k}$,

   e) $c_l = \dfrac{1+(-1)^l}{2}$, f) $\delta_n = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{27} + \cdots + \dfrac{1}{n^n}$,

   g) $l_n = \sqrt{n^2 - n}$, h) $\alpha_i = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5} + \cdots + \dfrac{i}{2i-1}$,

   i) $b_n = \sqrt[3]{\dfrac{n^2+1}{n}}$, j) $b_n = 3^n - 2^n$.

4. Probar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada si y sólo si existe $K \in \mathbb{R}_+$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq K$.

5. Demuestre que las sucesiones siguientes no están acotadas:

   a) $a_n = \dfrac{2^n}{n}$, b) $a_n = 2^n$, c) $b_n = \sqrt{n}$,
   d) $a_n = -n^2$, e) $c_n = n^2 + 1$.

6. Pruebe que las siguientes sucesiones son monótonas (crecientes o decrecientes) y acotadas:

   a) $a_n = \dfrac{2n}{n+3}$, b) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, c) $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, d) $\alpha_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

7. Demuestre que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente (es decir, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n < m \Rightarrow a_n \leq a_m$) si y sólo si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$.

8. Demostrar que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

   $$u_1 = -1 \quad \text{y} \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad \text{para } n \in \mathbb{N},$$

   es creciente y acotada superiormente.

9. Demostrar que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está dada por

$$a_n = \begin{cases} a_1 > 0, \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{A}{a_n}\right) & \text{para } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

donde $A > 0$, entonces

a) $\forall n \geq 2,\ \ a_n \geq \sqrt{A}$,

b) $\forall n \geq 2,\ \ a_{n+1} < a_n$.

10. En este ejercicio se demuestra nuevamente que la sucesión $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$\beta_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es creciente.

a) Demuestre la desigualdad de Bernoulli, es decir que:

$$\forall x \geq -1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}: \ \ (1+x)^n \geq 1 + nx$$

(sugerencia: dado $x \geq -1$, use inducción matemática para probar que $\forall n \in \mathbb{N}: \ (1+x)^n \geq 1 + nx$).

b) Use la desigualdad anterior para probar que

$$\forall n \geq 2: \ \ \beta_n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

c) Despeje β_n en la desigualdad del inciso b) y concluya que

$$\forall n \geq 2: \quad \beta_n \geq \beta_{n-1}.$$

§4

1.4 Límites de sucesiones

Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión y que P es alguna propiedad que a_n puede o no tener, por ejemplo, la propiedad de ser un entero positivo o la de ser un número mayor que 1 (o cualquier proposición abierta definida en $\mathbb{R}$). Para cada $n \in \mathbb{N}$, nos preguntamos si a_n tiene la propiedad P o no. Pueden ocurrir tres posibilidades:

a) Que a_n tenga la propiedad P para todos los valores de n, o para todos los valores de n excepto un número finito de ellos. En resumen, que a lo más un número finito de términos a_n no cumplan la propiedad P.

b) Que a_n no tenga la propiedad P para ningún valor de n o solamente para un número finito de tales valores. Es decir, a lo más para un número finito de valores de n, a_n tiene la propiedad P.

c) Que no ocurran ni a) ni b); en pocas palabras, que tanto el número de valores de n para los cuales a_n tiene la propiedad P como el número de valores de n para los cuales a_n no tiene la propiedad, son infinitos.

Ejemplos:

1. Sean $a_n = n$ y P la propiedad de ser un entero positivo. Entonces a_n tiene la propiedad P para todos los valores de n.

2. Sean $a_n = n$ y P la propiedad de ser un número mayor o igual a 1000. Entonces a_n tiene la propiedad para todos los valores de n excepto para un número finito, a saber, para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, 999$.

   Tanto en el ejemplo 1 como en el 2, el caso a) es el que se cumple.

3. Sean $a_n = n$ y P la propiedad de ser un número menor que 1000. Entonces se tiene el caso b), ya que solamente los términos a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{999}, satisfacen la propiedad.

4. Sean $a_n = n$ y P la propiedad de ser un entero par; entonces el caso que ocurre es el c), ya que tanto el número de términos que tienen P (que son todos los términos pares) como el número de términos que no tienen P (que son todos los términos impares), son infinitos.

Supongamos ahora que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión, que P es una propiedad como las anteriores y que el caso a) ocurre, es decir, que a lo más un número finito de términos de la sucesión, digamos

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \ldots, a_{n_N},$$

no satisfacen la propiedad P. Con a_{n_k} (para $1 \leq k \leq N$) denotamos al k-ésimo término que no satisface P y estamos suponiendo que solamente N términos de la sucesión (que no necesariamente son los N primeros términos) no tienen la propiedad. Es claro entonces que a_n tiene P si $n > n_N$. Por ejemplo, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión:

$$1,\ 3,\ 1,\ 7,\ 1,\ 1,\ 4,\ 8,\ 25,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 16,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$$

y P es la propiedad de ser 1, los únicos términos que no satisfacen P, son:

$$a_2,\ a_4, a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{15}.$$

Como se ve, estos 6 términos no son los primeros 6 términos de la sucesión, pero podríamos renombrarlos así:

$$\begin{array}{rl}
a_2 = a_{n_1}: & \text{es el primer término que no cumple } P \\
a_4 = a_{n_2}: & \text{es el segundo término que no cumple } P \\
\vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{15} = a_{n_6}: & \text{es el sexto y último término que no satisface } P
\end{array}$$

Además, si $n > 15$, es decir, si $n \geq 16$, a_n tiene la propiedad P, pues para $n \geq 16$, $a_n = 1$.

Con frecuencia se usa la expresión "a_n tiene la propiedad P para n suficientemente grande" para indicar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a_n tiene la propiedad P para todos los valores de n mayores o iguales a n_0. En símbolos:

$$\begin{array}{l}
a_n \text{ tiene la propiedad } P \text{ para } n \text{ suficientemente grande} \\
\Leftrightarrow \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \text{ satisface } P.
\end{array}$$

Si se van analizar los términos a_n de una sucesión, es natural hacerlo "en orden", comenzando con a_1, luego con a_2, luego con a_3, etc., es decir, suponiendo que n toma sucesivamente los valores sucesivos $1, 2, 3, \ldots$Para indicar que n tomará sucesivamente los valores sucesivos $1, 2, 3, \ldots$, suele también con frecuencia usarse la expresión "n tiende a infinito" o:

$$n \longrightarrow \infty$$

(∞ es un símbolo para decir infinito).

Así, si a_n tiene la propiedad P para n suficientemente grande y si n tiende a ∞ (o sea, si tomamos los valores $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, sucesivamente), entonces en algún momento n asumirá valores tan grandes como para asegurar que a_n tiene la propiedad P. En este sentido se pueden considerar equivalentes las frases:

"a_n tiene la propiedad P para n suficientemente grande" y

"a_n tiene la propiedad P cuando n tiende a ∞"

Ejemplos:

1. Si $a_n = \dfrac{1}{n}$, entonces $a_n < 1$ para n suficientemente grande, ya que $\dfrac{1}{n} < 1$ si y sólo si $n > 1$. por consiguiente, si $n_0 = 2$, entonces

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow a_n = \frac{1}{n} < 1.$$

2. Si $a_n = \dfrac{n+1}{n}$, entonces $a_n - 1 < \dfrac{1}{100}$ cuando $n \to \infty$, pues

$$a_n - 1 < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} - 1 < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{1}{100}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n > 100.$$

Por eso, si $n_0 = 101$, entonces

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n - 1 = \frac{1}{n} < \frac{1}{100}.$$

3. Sea $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$. Afirmamos que para n suficientemente grande,

$$-\frac{1}{10^6} < a_n < \frac{1}{10^6}.$$

Esto se debe a que

$$-\frac{1}{10^6} < a_n < \frac{1}{10^6} \Leftrightarrow |a_n| < \frac{1}{10^6} \Leftrightarrow \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{10^6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{10^6} \Leftrightarrow n > 10^6.$$

Así, hacemos $n_0 = 10^6 + 1$, entonces

$$\forall n \geq n_0, \quad -\frac{1}{10^6} < a_n < \frac{1}{10^6}.$$

4. Supongamos que $a_n = (-1)^n \left(\dfrac{n+1}{n}\right)$. Afirmamos que para n suficientemente grande o cuando $n \to \infty$,

$$a_n \geq -\frac{4}{3}.$$

En efecto, si n es par, $a_n \geq 0 \geq -\dfrac{4}{3}$ y si n es impar,

$$a_n \geq -\frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{n+1}{n} \geq -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3 \leq n,$$

por ende, si $n_0 = 3$, entonces

$$\forall n \geq n_0, \quad a_n \geq -\frac{4}{3}.$$

5. Si $a_n = \dfrac{2n+3}{3n}$ y P es la propiedad de ser menor que $\dfrac{2}{3} + r$ con $r > 0$, tal propiedad la tiene a_n para $n > \dfrac{1}{r}$. Si n_0 es un entero mayor que $\dfrac{1}{r}$, entonces, a_n tiene la propiedad P para $n \geq n_0$, o cuando $n \to \infty$.

6. Sea $a_n = \dfrac{7n-3}{n+1}$. Cuando $n \to \infty$, $a_n \in (6.95, 7.05)$ pues:

$$\begin{aligned} 6.95 < \frac{7n-3}{n+1} < 7.05 \quad &\Leftrightarrow 6.95\text{-}7 < \frac{7n-3}{n+1} - 7 < 7.05 - 7 \\ &\Leftrightarrow -0.05 < \frac{-3-7}{n+1} < 0.05 \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{-10}{n+1}\right| < 0.05 \Leftrightarrow \frac{10}{n+1} < 0.05 \\ &\Leftrightarrow n+1 > 200 \Leftrightarrow n > 199 \\ &\Leftrightarrow n \geq 200. \end{aligned}$$

Por lo tanto si $n_0 = 200$, entonces $\forall n \geq n_0,\ a_n \in (6.95, 7.05)$.

7. Si $\varepsilon > 0$ y $b_k = \dfrac{9k+10}{10k}$, entonces, para k suficientemente grande, $\left|b_k - \dfrac{9}{10}\right| < \varepsilon$, ya que:

$$\left|\frac{9k+10}{10k} - \frac{9}{10}\right| = \left|\frac{9k+10-9k}{10k}\right| = \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \frac{1}{k} < \varepsilon \Leftrightarrow k > \frac{1}{\varepsilon}$$

Sea $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $n_0 \in N$. Entonces, si $k \geq n_0$, $\left|b_k - \dfrac{9}{10}\right| < \varepsilon$

Por consiguiente $\left|b_k - \dfrac{9}{10}\right| < \varepsilon$ si $k \to \infty$.

Volvamos ahora a la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$. En el ejemplo 1. se vio que $a_n < 1$ cuando $n \to \infty$, pero podemos afirmar más: que $a_n < \dfrac{1}{10}$ para n suficientemente grande, a saber, para $n \geq 11$ (¿por qué?). Más aún: que

$$a_n < \frac{1}{100}$$

para $n \geq 101$, o incluso que

$$a_n < \frac{1}{1000000}$$

para n suficientemente grande (demuestre estos hechos como ejercicios, mi estimado lector) y es que los términos de la sucesión se van haciendo más y más pequeños (pero siempre mayores que cero) a medida que n crece (cuando $n \to \infty$), o mejor dicho, a_n se "va acercando" más y más a cero conforme $n \to \infty$. De hecho, dado cualquier ε, por pequeño que sea, con tal que ε sea positivo (por ejemplo $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$, $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ó $\varepsilon = \frac{1}{10^6}$, o cualquier otro valor positivo) se puede probar que $a_n < \varepsilon$ para n suficientemente grande. De hecho,

$$a_n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \varepsilon^{-1}.$$

Por lo tanto, si n_0 es cualquier natural mayor que $\frac{1}{\varepsilon}$, tenemos:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Así,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon. \tag{1.2}$$

(Es decir $\forall \varepsilon > 0$; $\frac{1}{n} < \varepsilon$ para n suficientemente grande).

Con $n_0(\varepsilon)$ se quiere subrayar que n_0 depende de ε. Por ejemplo, si $\varepsilon = 1$, basta tomar $n_0(\varepsilon) = 2$ (como en el ejemplo 1).
Si $\varepsilon = (1000)^{-1}$, basta tomar $n_0(\varepsilon) = 1001$ para asegurar que si $n \geq 1001$, entonces $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Ya $n_0(\varepsilon) = 2$ no sirve en este caso.

La expresión (1.2) lo único que se dice es que por muy pequeño que sea el número ε, siempre es posible lograr que todos los términos de la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ sean más chicos que ε, a partir de un cierto término a_{n_0} y como todos los términos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son positivos, esto va obligando a que la distancia entre 0 y a_n sea menor que ε a partir del término a_{n_0}.

Una situación análoga se tiene con la sucesión $a_n = \frac{n+1}{n}$ del ejemplo 2):

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

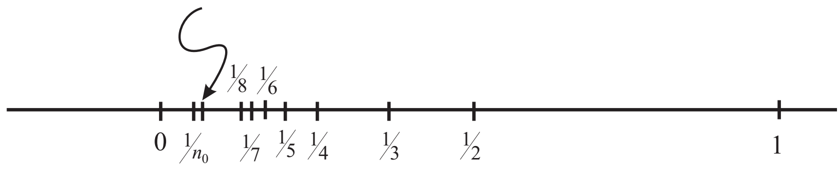


Figura 1.2

En este caso la distancia entre a_n y 1 es siempre mayor que cero, puesto que $|a_n - 1| = a_n - 1 = \frac{1}{n} > 0$, pero dicha distancia se puede hacer "tan pequeña como queramos" para n suficientemente grande, puesto que $\frac{1}{n}$ se puede hacer "tan pequeña como queramos" con tal que n sea suficientemente grande. En pocas palabras, dada cualquier $\varepsilon > 0$, por pequeña que sea, $|a_n - 1| < \varepsilon$ para n suficientemente grande o, precisando,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon.$$

Se deja como ejercicio completar los detalles de la demostración de este hecho (para esta sucesión $a_n = \dfrac{n+1}{n}$).

Cuando se tiene una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que, como en los casos anteriores, se van acercando a un cierto número l a medida que n crece, en el sentido que la distancia entre a_n y l se puede hacer "tan pequeña como queramos" para n suficientemente grande, se dirá que l es el límite de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, decimos que l es el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si: $\forall \varepsilon > 0$, $|a_n - l| < \varepsilon$ para n suficientemente grande y ya escrito con toda precisión, la definición queda de la siguiente manera.

Definición 1.4.1 Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $l \in \mathbb{R}$. Decimos que l es el **límite** de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon.$$

Antes que otra cosa suceda, hagamos observaciones urgentes:

1. Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no puede tener más de un límite l. Si, por el contrario, dos números distintos l y l' fueran límites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

pongamos $\varepsilon = \dfrac{|l - l'|}{2}$. Entonces $\varepsilon > 0$ y:

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon, \tag{1.3}$$
$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_2 \Rightarrow |a_n - l'| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq \text{máx}\,\{n_1,\ n_2\}$ es decir, n_0 es un natural mayor que n_2 y que n_1. Por lo tanto, $|a_{n_0} - l| < \varepsilon$ y $|a_{n_0} - l'| < \varepsilon$. Así, por la desigualdad del triángulo se llega a la siguiente contradicción:

$$|l - l'| \leq |l - a_{n_0}| + |a_{n_0} - l'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |l - l'|.$$

Con la seguridad de que el límite es único, podemos usar la siguiente.

Notación: si l es el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, escribimos

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n$$

(mejor dicho, escribimos $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ para denotar a la proposición "l es el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

A veces, si no hay peligro de confusión, se escribirá

$$a_n \to l \text{ en vez de } \lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

2. Para cualesquiera dos números reales $x,\ y$ se tiene

$$|x - y| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - y < \varepsilon.$$

Por consiguiente la expresión $|a_n - l| < \varepsilon$ es equivalente a

$$-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$$

y también a la siguiente expresión: $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ que a su vez es lo mismo que decir:

$$a_n \in (l - \varepsilon,\ l + \varepsilon).$$

así:

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$$
$$\text{tal que } \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in (l - \varepsilon,\ l + \varepsilon).$$

Esta equivalencia nos permite ilustrar geométricamente la definición de límite.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión (es decir, una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$), su gráfica consta de todos los puntos del plano de la forma $(n,\ a_n)$:

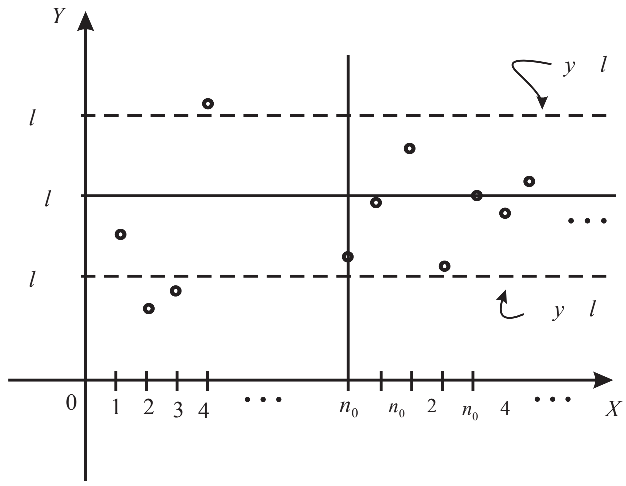


Figura 1.3

Dibujemos la línea $y = l$ y las paralelas $y = l - \varepsilon,\ \ y = l + \varepsilon$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

si y sólo si una vez que estas rectas han sido dibujadas no importando qué tan cerca estén entre sí, podemos siempre dibujar una recta $x = n_0$ (como en la Figura 1.3) de tal forma que el punto $(n_0,\ a_{n_0})$ de la gráfica sobre esta línea y todos los puntos a la “derecha” de él estén entre dichas rectas (en la región sombreada).

Por supuesto, para representar gráficamente una sucesión, no es necesario usar el plano. Puede hacerse mediante dos rectas paralelas, una que represente al dominio y la otra para representar las imágenes, como en el caso de la sucesión $\left\{(-1)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}$ cuya representación es la siguiente:

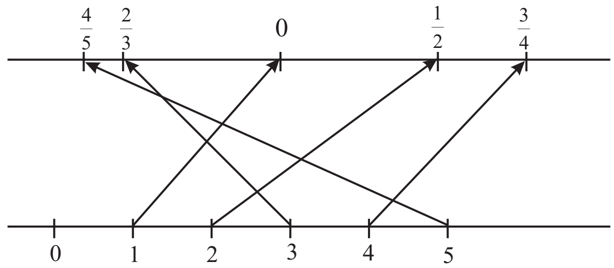


Figura 1.4

Con esta representación, si una sucesión converge a un número l, se ve claramente cómo los términos de ella se van "acumulando" alrededor de l, como puede observarse en el caso de la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$.

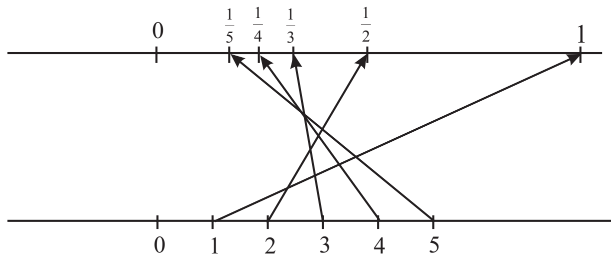


Figura 1.5

Ejemplos:

1. Sea $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$.

   Los términos de esta sucesión van oscilando alrededor de cero: a veces son positivos y a veces son negativos, pero a medida que n crece, el factor $\dfrac{1}{n}$ se hace chico y esto hace que a_n se vaya acercando a cero. Probaremos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Sea para ello $\varepsilon > 0$, entonces:

$$|a_n - 0| = |a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = |(-1)^n| \left|\frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto, $|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Sea $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Por lo tanto, si $n \geq n_0$,

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

(ver observación 2).

2. Sea $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

   Como se ve, $a_n = \dfrac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Para n muy grande, $\dfrac{1}{n+1}$ es pequeño y a_n "se parece a 1". Proponemos entonces que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Para probar esto observemos que

   $$|a_n - 1| = \left|1 - \frac{1}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$$

   así, si $\varepsilon > 0$, se tiene

   $$|a_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

   Si $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, entonces $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon$.

3. Sea $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+n+1}$.

   Poniendo

   $$a_n = \frac{n^2/n^2 - 1/n^2}{n^2/n^2 + n/n^2 + 1/n^2} = \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}},$$

   se observa que si n es muy grande, $\dfrac{1}{n}$ y $\dfrac{1}{n^2}$ son insignificantes y a_n se parece a $\dfrac{1}{1} = 1$.

Probemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Sea $\varepsilon > 0$. Viendo que:

$$\left|\frac{n^2-1}{n^2+n+1} - 1\right| = \left|\frac{n^2-1-n^2-n-1}{n^2+n+1}\right| = \left|\frac{-2-n}{n^2+n+1}\right| = \frac{n+2}{n^2+n+1},$$

tratar de resolver la inecuación $\dfrac{n+2}{n^2+n+1} < \varepsilon$ para ver para que n's se cumple $|a_n - 1| < \varepsilon$, como lo hicimos antes, es engorroso en este caso. Mejor observamos que si $n \geq 2$,

$$n + 2 \leq 2n,$$

y que $n^2 + n + 1 > n^2$ y por tanto que

$$\frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2}.$$

Así:

$$|a_n - 1| = \frac{n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{2n}{n^2+n+1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

Ahora bien, $\dfrac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{2}{\varepsilon}$. Por lo tanto, si escogemos n_0 como cualquier natural mayor que $\dfrac{2}{\varepsilon}$ y mayor o igual a 2,

$$n \geq n_0 \Rightarrow n \geq n_0 > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon$$

y por eso,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

4. Sea $a_n = 69 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$
   (esta es la sucesión constante $69, 69, 69, 69, \ldots$)
   Proponemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 69$.

   Sean $\varepsilon > 0$ y $n_0 = 1$. Entonces, si $n \geq n_0$, se tiene

$$|a_n - 69| = |69 - 69| = 0 < \varepsilon$$

5. Sea $a_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$. Algunos términos de esta sucesión son:

$$2,\ 1+\frac{1}{4}; 1+\frac{1}{9}; 1+\frac{1}{16}; 1+\frac{1}{25}, \ldots$$

Como consecuencia de este "examen exhaustivo" de términos de la sucesión, podemos proponer que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

Si $\varepsilon > 0$, entonces:

$$|a_n - 1| = \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Si $n_0 > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, se tiene

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon.$$

6. Sea $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$.
Los primeros términos de esta sucesión son:

$$1,\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{8},\ \frac{6}{10},\ \frac{7}{12}, \ldots$$

Puede verse que van decreciendo y son menores que 1. Estamos tentados a proponer que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Antes de dar un paso "tan delicado" tratemos de obtener otra expresión para los términos de la sucesión

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2} &= \frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)\\ &= \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

Con esta expresión vemos que los términos nunca son menores que $\dfrac{1}{2}$, pues $\dfrac{1}{2n} > 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Además, a medida que $n \to \infty$, $\dfrac{1}{2n}$ se acerca a cero, así que $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}$ debe acercarse a $\dfrac{1}{2}$. Proponemos pues, con más confianza, que el límite de la sucesión es $\dfrac{1}{2}$. ¿Puede demostrarlo?

7. Sea $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Cuando n es muy grande, $\sqrt{n+1}$ y $\sqrt{n}$ se parecen mucho y prácticamente a_n es cero. Probemos que $a_n \to 0$.

   Sea $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| &= \left| \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon^2 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

   Sea $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$. Entonces

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon.$$

8. Si $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$, como $|(-1)^n| = 1$, se tiene que:

$$|a_n - 0| = |a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n^3} \right| = \frac{1}{n^3}.$$

   Ahora es fácil probar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Hágalo, por favor.

9. Como ya vimos, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Generalizando este resultado, probaremos que si $p \in N$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0.$$

Para ello sea $\varepsilon > 0$. Observemos que:

$$\left|\frac{1}{n^p} - 0\right| = \frac{1}{n^p} < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n^p}\right)^{1/p} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon^{1/p} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^{1/p}}.$$

Por lo tanto, si $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon^{1/p}}$, entonces si $n > n_0$, se tiene

$$\left|\frac{1}{n^p} - 0\right| < \varepsilon.$$

Por ejemplo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{69}} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

10. Es fácil darse cuenta que 0 es el límite de las siguientes sucesiones:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots, (-1)^n\frac{1}{2^n}, \dots$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$$

Estas sucesiones obedecen a la forma $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde, $x = \dfrac{1}{2}$ en el primer caso, $x = -\dfrac{1}{2}$ en el segundo y $x = \dfrac{1}{3}$ en el tercero. Probaremos que esta situación es más general:

$$\text{si } |x| < 1, \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

Si $x = 0$, $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión constante 0, que claramente tiene a 0 por límite.
Si $x \neq 0$, $0 < |x| < 1$ y por lo tanto $\dfrac{1}{|x|} > 1$, así que existe $p > 0$ tal que $\dfrac{1}{|x|} = 1 + p$. Sea pues $\varepsilon > 0$. Notemos que

$$|x^n - 0| = |x^n| = |x|^n = \frac{1}{(1+p)^n},$$

pero

$$(1+p)^n \geq 1+np > np.$$

Por lo tanto, $|x^n - 0| < (np)^{-1}$. Así, si logramos probar que $\dfrac{1}{np}$ es menor que ε para n suficientemente grande, se tendrá también que $|x^n - 0| < \varepsilon$ para n suficientemente grande, como queríamos probar. Para fortuna nuestra,

$$\frac{1}{np} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon p}.$$

Por lo tanto, $n > \dfrac{1}{\varepsilon p} \Rightarrow |x^n - 0| < \dfrac{1}{np} < \varepsilon$.

11. Sea $p > 0$ $(p \in \mathbb{R})$. Si se usa una calculadora, será fácil convencerse de que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$, pero los que no tienen calculadora podrán estar seguros de dicho resultado mediante la siguiente demostración.

   a) Supongamos que $p = 1$. En esta caso $\sqrt[n]{p} = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente,
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

   b) Supongamos que $p > 1$. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{p} > 1$ y por eso $\sqrt[n]{p} - 1 > 0$. Si hacemos $\alpha_n = \sqrt[n]{p} - 1$, se tendrá $\alpha_n > 0$ y
   $$p = (\alpha_n + 1)^n = 1 + n\alpha_n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \alpha_n^k \geq 1 + n\alpha_n,$$
   ya que $\alpha_n > 0$. Por lo tanto, $\alpha_n \leq \dfrac{p-1}{n}$

   Para probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$, tomemos una $\varepsilon > 0$ y observemos que:
   $$|\sqrt[n]{p} - 1| = |\alpha_n| = \alpha_n \leq \frac{p-1}{n}$$
   pero $\dfrac{p-1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{p-1}{\varepsilon}$.

   Si $n_0 > \dfrac{p-1}{\varepsilon}$, entonces $n \geq n_0 \Rightarrow |\sqrt[n]{p} - 1| < \varepsilon$.

c) Supongamos por último que $0 < p < 1$. Por lo tanto $\frac{1}{p} > 1$. Observe que en el caso b) se probó que si $x > 1$, donde x es algún real, entonces:
$$\sqrt[n]{x} \to 1.$$
Por lo tanto, si $x = \frac{1}{p} > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{p}} = 1$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{p}} = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces
$$\left|\frac{1}{\sqrt[n]{p}} - 1\right| = \left|\sqrt[n]{\frac{1}{p}} - 1\right| < \varepsilon.$$
Como $p < 1$, $\sqrt[n]{p} < 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, así que finalmente,
$$\begin{aligned} n \geq n_0 \Rightarrow |1 - \sqrt[n]{p}| &= \left|\sqrt[n]{p}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{p}} - 1\right)\right| = |\sqrt[n]{p}|\left|\frac{1}{\sqrt[n]{p}} - 1\right| \\ &< \left|\frac{1}{\sqrt[n]{p}} - 1\right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

12. De forma análoga probaremos que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Observemos primero que para $n \geq 2$, $\sqrt[n]{n} > 1$. Sea $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1$ para $n \geq 2$. Por lo tanto,
$$\begin{aligned} n \geq 2 \Rightarrow n &= (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n^n \geq \\ &\geq \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 \Rightarrow \alpha_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \end{aligned}$$
Pero
$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n-1} < \varepsilon^2 \Leftrightarrow n - 1 > \frac{2}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1.$$

Sea $n_0 > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$. Si $n \geq n_0$, se tendrá $n \geq 2$ y por consiguiente
$$\alpha_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

con lo que $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$.

Observación: los límites hallados en los ejemplos $9-12$ son muy usados. Sirven para calcular límites más complicados, así que ¡apréndaselos de una vez!

$$\begin{aligned}
&a) \qquad p\in\mathbb{N}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n^p}=0,\\
&b) \qquad |x|<1\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^n=0,\\
&c) \qquad p\in\mathbb{R}_+\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1,\\
&d) \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.
\end{aligned}$$

Ejercicios 3.

1. Suponga que $\varepsilon>0$. Resuelva para n cada una de las siguientes desigualdades

   a) $\dfrac{2n+3}{3n}<\dfrac{2}{3}+\varepsilon$, b) $-\varepsilon<\dfrac{3}{n-5}$,

   c) $1-\varepsilon<\dfrac{n^2-13}{n^2}$, d) $-\varepsilon<\dfrac{3}{n^2+8}$.

2. Para cada una de las siguientes sucesiones y propiedades dadas, diga cuál de los casos a), b) o c) enunciados en la página 31 se cumple:

   i) $a_n=1-(-1)^n\dfrac{1}{n}$ y $P: a_n<1$,

   ii) $a_n=1-(-1)^n\dfrac{1}{n}$ y $P: a_n<2$,

   iii) $a_n=\dfrac{1000(1+(-1)^n)}{n}$ y $P: a_n<1$,

   iv) $a_n=\dfrac{1}{n}$ y $P: a_n<0.001$,

v) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ y $P: |a_n| < 0.001$,

vi) $a_n = \dfrac{(-1)^n 10000}{n}$ y $P: |a_n| < 0.001$,

vii) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ y $P: 1 - a_n < 0.0001$,

viii) $a_n = \dfrac{n^2+4}{3n^2}$ y $P: a_n \in (1,\ 2)$.

3. En cada una de las expresiones siguientes se da el límite cuando n tiende a ∞. Encuéntrese en cada caso un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, la distancia entre el valor de la expresión y su límite sea: a) menor que $\dfrac{1}{10}$, b) menor que $\dfrac{1}{1000}$, c) menor que $\dfrac{1}{1000000}$.

   i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n} = 0$, ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2n}{1+n} = 2$, iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n-1}{3n^2+1} = \dfrac{1}{3}$,

   iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$, v) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{4n} = \dfrac{3}{4}$, vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

4. Determinar si las sucesiones siguientes tienen límite. En cada caso donde exista un límite l, determine $n_0(\varepsilon)$ tal que $|a_n - l| < \varepsilon$ si $n \geq n_0(\varepsilon)$ (se está suponiendo que ε es cualquier número positivo), donde a_n está dada por:

   a) $\dfrac{n^2+n}{2n^2+1}$, b) $\dfrac{6n^3+4n-1}{n^3+5n}$, c) $\dfrac{n^2+1}{n+1}$, d) $1 - n^{(-1)^n}$,

   e) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$, f) $\dfrac{3n^5-2n^4+6n^3-2}{4n^5+6n^3+n^2-1}$.

5. Aplicando la definición de límite demostrar que:

   a) El límite de la sucesión
   $$\frac{3}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}, \frac{9}{12}, \cdots \qquad \text{es} \qquad \frac{2}{3}.$$

   b) El límite de la sucesión
   $$\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{12}{5}, \frac{17}{7}, \cdots \qquad \text{es} \qquad \frac{5}{2}.$$

c) El límite de la sucesión

$$\frac{2}{5},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{13},\ \frac{2}{17},\cdots \qquad \text{es} \qquad 0.$$

d) El límite de la sucesión $0.3,\ 0.33,\ 0.333,\ 0.3333,\ldots$ es $\frac{1}{3}$.

6. De nuevo aplicando la definición de límite demuestre que:

a) $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^k+1}-\sqrt{n^k})=0,$$

b) $$\forall k\geq 0\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2kn+1}-\sqrt{n^2+5}\right)=k,$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2},$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}\right)=\frac{1}{2},$$

e) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)=0,$$

f) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0$$

(sugerencia: compare esta suma con su sumando mayor).

7. a) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y para cada $n\in\mathbb{N}$ definamos $x_n=a_{2n}$ y $y_n=a_{2n-1}$, es decir: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de términos pares de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de términos impares de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty}x_n=l=\lim_{n\to\infty}y_n, \qquad \text{pruebe que } \lim_{n\to\infty}a_n=l.$$

b) Use a) para probar que la sucesión dada por $a_{2n}=\frac{1}{n}$, $a_{2n-1}=\frac{1}{2n}$, converge a 0.

c) Use a) para probar que la sucesión

$$1,\ -3,\ 0,-2,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{5}{4},\ -\frac{7}{8},\ -\frac{9}{8},\ldots$$

converge a -1

8. a) Demuestre que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, entonces las sucesiones dadas por $x_n = a_{2n}$ y $y_n = a_{2n-1}$ también tienen límite l.

   b) Use a) para probar que la sucesión $(-1)^n$ no tiene límite.

§5

1.5 Sucesiones convergentes

Es común decir que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l para indicar que l es el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y señalar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge o que es convergente cuando tiene límite. Se dirá también que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, si no converge.

En casi todas la sucesiones que hemos visto, ha sido fácil intuir el límite de la sucesión en cuestión y verificar que satisface la Definición 1.4.1. Como esto no siempre ocurre, en esta sección probaremos algunos resultados que, en general, simplificarán al máximo las demostraciones de convergencia de sucesiones.

Para comenzar, supongamos que una sucesión converge a l. Esto significa que "casi todos" los términos de la sucesión están en un intervalo abierto $(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$ y es de esperarse que los términos restantes (un número finito) no puedan "alejarse" mucho de l. El siguiente teorema establece formalmente esta idea.

Teorema 1.5.1 *Si* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, entonces es acotada.*

Demostración: Supongamos que $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Si $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $|a_n - l| < 1$. Pero $|a_n - l| \geq |a_n| - |l|$, así que:

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| - |l| < 1 \Rightarrow |a_n| < |l| + 1. \tag{1.5}$$

Sea $M = \text{máx}\,\{|a_1|,\ |a_2|, \ldots\ |a_{n-1}|\}$. Luego,

$$n < n_0 \Leftrightarrow |a_n| \leq M. \tag{1.6}$$

Por consiguiente, si $K = \max\{M,\ |l|+1\}$, tenemos, por (1.5) y (1.6), que para toda $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq K$ y que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada (ver Ejercicios 2.). ■

Este teorema puede ser empleado para demostrar que una sucesión no es convergente, verificando simplemente que no está acotada. Por ejemplo, las sucesiones

$$\text{a) } a_n = n, \qquad \text{b) } a_n = 2n + (-1)^n,$$
$$\text{c) } s_n = (-1)^n n, \qquad \text{d) } c_n = \frac{3-n^3}{n^2+1}.$$

no son acotadas y por lo tanto no son convergentes.

Veamos otros ejemplos:

1. Sea $a_n = \dfrac{2^n}{n}$. Por el teorema del binomio de Newton se tiene:

$$a_n = \frac{2^n}{n} = \frac{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}}{n}$$
$$= \frac{1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} + \cdots + n + 1}{n}.$$

   Para $n \geq 2$,
$$a_n = \frac{2^n}{n} > \frac{n(n-1)}{2n} = \frac{n-1}{2}.$$

   Si K es cualquier real, $\dfrac{n-1}{2} > K \Leftrightarrow 2K+1 < n$. Por lo tanto si elegimos $n_0 > 2K+1$, se tiene $a_{n_0} > \dfrac{n_0-1}{2} > K$, lo que prueba que ningún real es cota superior de $\{a_n | n \in N\}$. Por lo tanto, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge (diverge), pues no es acotada superiormente.

   En este ejemplo se ve que no sólo $a_{n_0} > K$ sino que para cualquier $n \geq n_0$ se tiene $n > 2K+1$ y por lo tanto, $a_n > K$, así que esta sucesión satisface la siguiente propiedad:

$$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq n_0 \Rightarrow a_n > K. \tag{1.7}$$

Esto en palabras significa que todo número real es sobrepasado por todos los términos de la sucesión, a partir de cierto momento.

De una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisface (1.7), se dirá que *diverge a* ∞ y se escribirá

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

(esta condición suele escribirse también como $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$).

Análogamente, se dirá que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ (léase "menos infinito") si

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq n_0 \Rightarrow a_n < K.$$

2. Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada superiormente y para n suficientemente grande, $a_n \geq b_n$, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada superiormente. También si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ y $a_n \geq b_n$ para n suficientemente grande, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también diverge a infinito (ver Ejercicios 4.).

3. Supongamos que $x \in \mathbb{R}$. Probamos ya (ejemplo 10, Sección 4) que si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

   Supongamos ahora que $|x| > 1$.

   a) Si $x > 1$, entonces $x = 1 + p$ con $p > 0$ y por lo tanto,

   $$x^n = (1 + p)^n \geq 1 + np.$$

   Como la sucesión $b_n = 1 + np$ diverge a ∞, x^n diverge a ∞.

   b) Si $x < -1$, hagamos $y = -x$. Entonces $y > 1$ y por el inciso a), y^n no es acotada superiormente (de hecho $\lim_{n\to\infty} y^n = \infty$). Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$,

   $$x^{2n} = (-y)^{2n} = y^{2n} y x^{2n-1} = (-y)^{2n-1} = -y^{2n-1}.$$

   Por lo tanto,

   $$\{x^{2n} : n \in \mathbb{N}\} \text{ no está acotada superiormente y}$$

$$\{x^{2n-1} : n \in \mathbb{N}\} \text{ no está acotada inferiormente,}$$

es decir, el conjunto de términos pares de $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotado superiormente y el conjunto de términos impares de $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotado inferiormente, así que $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión no acotada superior ni inferiormente.

c) Por último, si $x = 1$, entonces $x^n = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1, pero si $x = -1$, se puede probar que la sucesión $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge (ver Ejercicios 3, problema 7), lo cual nos proporciona un ejemplo de una sucesión que es acotada pero no es convergente y muestra con ello que el inverso del Teorema 1.5.1 no es verdadero (o sea que no es cierto que toda sucesión acotada es convergente).

Sin embargo, si una sucesión es acotada superiormente y es creciente, sus términos deben acumularse alrededor de cierto número, es decir, la sucesión debe converger. Este es el enunciado del siguiente teorema.

Teorema 1.5.2 *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a*

$$l = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

(es decir, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al supremo del conjunto de términos de la sucesión).

Demostración: Sea $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $A \neq \varnothing$ y como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente, A es un conjunto acotado superiormente y por el axioma del supremo, A tiene supremo. Sea $l = \sup A$. Mostraremos que $l = \lim_{n\to\infty} a_n$; para ello, sea $\varepsilon > 0$. Como $l - \varepsilon < l$ y l es la más pequeña de las cotas superiores de A, $l - \varepsilon$ no es cota superior de A y por ende, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$l - \varepsilon < a_{n_0} \leq l.$$

Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente,

$$\begin{aligned} n \geq n_0 \quad &\Rightarrow a_{n_0} \leq a_n \Rightarrow l - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq l \\ &\Rightarrow l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que
$$l = \lim_{n\to\infty} a_n. \ \blacksquare$$

Observaciones urgentes:

1. Por supuesto, hay una afirmación análoga que señala que: Si una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada inferiormente es decreciente, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al ínfimo del conjunto $\{a_n|n \in N\}$.

2. Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, \quad a_n \leq a_{n+1}$ y la sucesión es acotada superiormente, se puede concluir que:
$$\sup\{a_n|n \geq n_0\}$$
es igual a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Veamos algunos ejemplos del uso de estos teoremas.

1. Sea $a_1 = 0.3$ y $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{3}{10^{n+1}}$, es decir,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{100} + \tfrac{3}{1000} + \cdots + \tfrac{3}{10^n}, \quad a_n < 1 \qquad \text{y}$$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Así esta sucesión converge a
$$l = \sup\{a_n|n \in \mathbb{N}\}.$$
Ahora bien, dada $\varepsilon > 0$,
$$\begin{aligned}
\left|a_n - \frac{1}{3}\right| &= \left|\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{3}{10^n} - \frac{1}{3}\right| \\
&= \left|\frac{9\cdot 10^{n-1} + 9\cdot 10^{n-2} + \ldots + 9 - 10^n}{3\cdot 10^n}\right| \\
&= \left|\frac{10^n - \overbrace{99\cdots 9}^{n-1 \text{ nueves}}}{3\cdot 10^n}\right| = \frac{1}{3\cdot 10^n} < \frac{1}{10} < \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|a_n - \dfrac{1}{3}\right| < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, así que $l = \dfrac{1}{3}$. Esta es una forma de probar que $\dfrac{1}{3}$ es el supremo de

$$\{0.3,\ 0.33,\ 0.333,\ 0.3333, \ldots\}$$

2. La sucesión $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, entonces $0 = \inf\left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

3. La sucesión recurrente definida por

$$\begin{aligned} &u_1 = 7, \\ &u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \quad \text{para } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

es decreciente y está acotada inferiormente. Por lo tanto converge al $\inf\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$

4. La sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

es creciente y acotada superiormente (ver ejemplos 7, Sección 1.3). Por lo tanto, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Definición 1.5.1 Se define el número real e como

$$e = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

1. Como ya se probó, para cada $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq \alpha_n < 3$. Como

$$e = \sup\{\alpha_n / n \in \mathbb{N}\},$$

$e \leq 3$ y por eso:

$$2 \leq e \leq 3.$$

De hecho, e es número irracional (como mostraremos después) que vale aproximadamente $2.718281828459045\ldots$

2. También la sucesión $\beta_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ converge pues es creciente y acotada superiormente. En páginas posteriores demostraremos que su límite es también e.

El Teorema 1.5.2 nos asegura que si una sucesión es creciente y acotada superiormente converge. Ahora, si una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y no está acotada superiormente, entonces diverge, por no estar acotada (Teorema 1.5.1). El hecho sobresaliente es que diverge a ∞. Para convencerse de ello, tómese un número $K \in \mathbb{R}$; como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} > K$ y finalmente, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente,

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq a_{n_0} > K.$$

Análogamente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y no acotada inferiormente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. De aquí, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.5.3 *a) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y no acotada superiormente, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

b) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y no acotada inferiormente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

El lector deberá comprobar que si $p \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = n^p$ es creciente y no está acotada superiormente y concluir que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

En la búsqueda de límites es sumamente útil el hecho de que muchas sucesiones se puedan descomponer en suma, producto y cociente de otras sucesiones. Veamos cómo se definen estas operaciones: Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones, la sucesión suma de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}};$$

la sucesión producto de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión

$$(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}};$$

y la sucesión cociente de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Esta última sucesión está definida en $\{n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0\}$. Por ejemplo, si se tienen sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un número $b \neq 0$, podemos asegurar que $b_n \neq 0$ para n suficientemente grande y por lo tanto que la sucesión $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene sentido para n suficientemente grande (ver nota de la página 21).

Enunciemos pues, el resultado que nos lleva a afirmar lo anterior.

Teorema 1.5.4 *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *y* $b \neq 0$, *entonces* $b_n \neq 0$ *para* n *suficientemente grande, es decir,* $\exists\ n_0 \in N$ *tal que* $n \geq n_0 \Rightarrow b_n \neq 0$.

Demostración: *a*) Si $b > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n \geq n_0 \quad &\Rightarrow |b_n - b| < \frac{b}{2} \Rightarrow b - \frac{b}{2} < b_n < b + \frac{b}{2} \\ &\Rightarrow 0 < \frac{b}{2} < b_n. \end{aligned}$$

Así, $n \geq n_0 \Rightarrow b_n > 0 \Rightarrow b_n \neq 0$.

b) Si $b < 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n \geq n_0 \quad &\Rightarrow |b_n - b| < -\frac{b}{2} \Rightarrow b + \frac{b}{2} < b_n < b - \frac{b}{2} \\ &\Rightarrow b_n < \frac{b}{2} < 0. \end{aligned}$$

Así, $n \geq n_0 \Rightarrow b_n < 0 \Rightarrow b_n \neq 0$. ■

Corolario 1.5.5 *Si* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *y* $b_n \geq 0$ *para* n *suficientemente grande, entonces* $b \geq 0$.

Demostración: La prueba de este corolario es prácticamente el inciso b) de la demostración del teorema anterior. ■

Se tiene además este otro resultado.

Teorema 1.5.6 *Supongamos que* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ *y que* $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. *Entonces:*

(a) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,

(b) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$,

(c) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$, *si* $b \neq 0$,

(e) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, *si* $b \neq 0$,

(f) Si $a_n \geq 0$ *para* n *suficientemente grande y* $q \in N$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[q]{a_n} = \sqrt[q]{a}$,

(g) Si $a > 0$ *y* $p \in Z$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n^p = a^p$ *(observe que* $a > 0 \Rightarrow a_n > 0$ *para* n *suficientemente grande),*

(h) Si $a > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ *y* $q \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[q]{a_n^p} = \sqrt[q]{a^p},$$

(i) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Demostración: (a), (e) e (i) se dejan como ejercicios.

(b) Sea $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad n \geq n_0 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} n \geq n_0 \Rightarrow |(a_n - b_n) - (a - b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$.

(c) La comparación de las áreas de los siguientes rectángulos, nos sugiere la igualdad

$$ab - a_n b_n = a_n(b - b_b) + b(a - a_n).$$

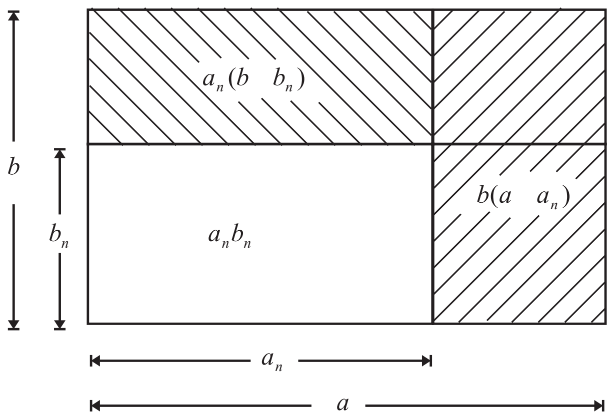


Figura 1.6

Entonces

$$\begin{aligned} |ab - a_n b_n| &= |a_n(b - b_n) + b(a - a_n)| \leq |a_n||b - b_n| + |b||a - a_n| \\ &\leq |a_n||b - b_n| + (|b_n| + 1)|a - a_n|. \end{aligned}$$

Ahora bien, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y por lo tanto existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si $\varepsilon > 0$, existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{y} \quad |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$$

(observe que $2(|b|+1) > 0$).
Luego, si $n \geq N_0$, se tiene:

$$|ab - a_n b_n| \leq M|b - b_n| + (|b|+1)|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(d) Sea $\varepsilon > 0$. Como $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $b \neq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|b - b_n| < \dfrac{|b|}{2}$. Por consiguiente, si $n \leq n_0$, entonces $|b| - |b_n| \leq |b - b_n| < \dfrac{|b|}{2}$, es decir, $|b_n| > \dfrac{|b|}{2}$. Por lo tanto, si $n \leq n_0$,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b||b_n|} < \frac{2|b - b_n|}{|b^2|}$$

y

$$\frac{2|b - b_n|}{|b^2|} < \varepsilon \Leftrightarrow |b - b_n| < \frac{|b|^2\varepsilon}{2}.$$

Esto último se puede lograr para n suficientemente grande.

(e) Este inciso es corolario de (c) y (d).

(f) Lo demostraremos en dos casos:

i) Si $a = 0$, dada $\varepsilon > 0$,

$$|\sqrt[q]{a_n} - 0| = \sqrt[q]{a_n} < \varepsilon \Leftrightarrow a_n < \varepsilon^q$$

y como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n < \varepsilon^q$ para n suficientemente grande.

ii) Si $a > 0$, descompongamos $\left|\sqrt[q]{a_n} - \sqrt[q]{a}\right|$ así:

$$\begin{aligned} |\sqrt[q]{a} - \sqrt[q]{a}| &= \frac{|a_n - a|}{\sqrt[q]{a_n^{q-1}} + \sqrt[q]{a_n^{q-2}}\sqrt[q]{a} + \sqrt[q]{a_n^{q-3}}\sqrt[q]{a^2} + \cdots + \sqrt[q]{a^{q-1}}} \\ &\leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt[q]{a^{q-1}}}. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dada $\varepsilon > 0$, $|a_n - a| < \sqrt[q]{a^{q-1}}\varepsilon$ para n suficientemente grande.

(g) También se probará en dos casos (el caso en que $p = 0$ es trivial):

i) Si $p \in \mathbb{N}$, usando inducción matemática y el inciso (c) se prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = a^p$.

ii) Si $p < 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n^{-p}} = \dfrac{1}{a^{-p}} = a^p$.

(h) Si $p \in Z$ y $q \in N$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = a^p$ por el inciso (g) anterior y por el inciso (f), $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[q]{a_n^p} = \sqrt[q]{a^p}$.

(i) $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ y esto se puede hacer chico. ■

Observación. Aunque las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no sean convergentes, puede suceder que $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ o $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sí converjan (ver el ejercicio 9 de Ejercicios 4).

Ejemplos:

1. Obtener $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^3+3n^2+2n}{5n^3+2n^2+1}}}$.

   Los términos de la sucesión $\left(\dfrac{n^3+3n^2+2n}{5n^3+2n^2+1}\right)$ pueden también ser escritos así:

   $$\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

   Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, por el Teorema 1.5.6 (incisos (a), (c) y (e)) se tiene que:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+2n}{5n^3+2n^2+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}} = \frac{1}{5}.$$

Por el inciso f), $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n^3+3n^2+2n}{5n^3+2n^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ y por (a) $\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$ y finalmente, por (e),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^3+3n^2+2n}{5n^3+2n^2+1}}} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 2\sqrt{5}.$$

Teorema 1.5.7 *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *y* $a_n \le b_n$ *para* n *suficientemente grande, entonces* $a \le b$.

Demostración: Para n suficientemente grande $b_n - a_n \ge 0$. Por lo tanto, por el corolario del Teorema 1.5.4, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) \ge 0$. Pero $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = b - a$, así que $b - a \ge 0$, es decir, $a \le b$. ■

Teorema 1.5.8 *Si* $a_n \le b_n \le c_n$ *para* n *suficientemente grande y* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$*, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Demostración: Si $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n \ge n_0 \;&\Rightarrow a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon,\ a-\varepsilon < c_n < a+\varepsilon \text{ y } a_n \le b_n \le c_n \\ &\Rightarrow a-\varepsilon < a_n,\ a+\varepsilon > c_n \text{ y } a_n \le b_n \le c_n \end{aligned}$$

por consiguiente,

$$n \ge n_0 \Rightarrow a-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a+\varepsilon \Rightarrow |a-b_n| < \varepsilon. \blacksquare$$

Ejemplos:

1. Sea $S_n = \dfrac{a_0n^p + a_1n^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0n^q + b_1n^{q-1} + \cdots + b_q}$, donde p, $q \in \mathbb{N}$ y a_0, a_1, $\ldots$, a_p, $b_0, b_1, \ldots b_q$ son números reales, $a_0 \ne 0$ y $b_0 \ne 0$.

   Como las sucesiones $a_0n^p + a_1n^{p-1} + \cdots + a_p$ y $b_0n^q + b_1n^{q-1} + \cdots + b_q$ no convergen, pues no son acotadas, no se puede aplicar directamente el Teorema 1.5.6 (e) y escribir:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_0n^p + a_1n^{p-1} + \cdots + a_p)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_0n^q + b_1n^{q-1} + \cdots + b_q)}.$$

Mejor transformamos S_n así:

$$S_n = \frac{n^p\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_p}{n^p}\right)}{n^q\left(b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_q}{n^q}\right)} = n^{p-q}\left(\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_q}{n^q}}\right)$$

y analizamos 3 diferentes casos:

(a) Si $p = q$, entonces $n^{p-q} = n^0 = 1$ y $S_n = \dfrac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_q}{n^q}}$.
Ahora sí, cada uno de los sumandos $\dfrac{a_k}{n^k}$ y $\dfrac{b_r}{n^r}$ converge a cero. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_0}{b_0}.$$

(b) Si $p < q$, entonces $p - q < 0$ y $n^{p-q} = \dfrac{1}{n^{q-p}}$ con $q - p > 0$. Por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-q} = 0$ (Ejemplo 9, §4). Además

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_q}{n^q}}\right) = \frac{a_0}{b_0}$$

Así, $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-q}\left(\dfrac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_q}{n^q}}\right) = 0 \cdot \dfrac{a_0}{b_0} = 0$

(c) Sea $p > q$. Si hacemos $\alpha = \dfrac{a_0}{b_0}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_q}{n^q}},$$

entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ y si:

i) $\alpha > 0$, entonces $\alpha_n > \dfrac{\alpha}{2}$ para n suficientemente grande y por lo tanto, $S_n = n^{p-q}\alpha_n > n^{p-q}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Como $n^{p-q}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \to \infty$, entonces $S_n \to \infty$.

ii) $\alpha < 0$, entonces $\alpha_n < \frac{\alpha}{2}$ para n suficientemente grande y así $S_n = n^{p-q}\alpha_n < n^{p-q}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$. Como $n^{p-q}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \to -\infty$, se tiene que $S_n \to -\infty$.

2. Hallar
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}}.$$

Ya se sabe y se repite que
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$
y que
$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n^3 + 5n}{6}.$$
Entonces
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3 + 5n} = 2$$
(Por el ejemplo anterior).

3. Sea $a_n = \dfrac{1 + n^2 + \sqrt[4]{3n^2 - 5n + 1}}{n + \sqrt[3]{8n^6 - 5} + \sqrt[5]{32n^{10} - 16n + 4}}$.

Dividiendo numerador y denominador entre n^2, se tiene:
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\frac{1}{n^2} + 1 + \sqrt[4]{\frac{3}{n^6} - \frac{5}{n^7} + \frac{1}{n^8}}}{\frac{1}{n} + \sqrt[3]{8 - \frac{5}{n^6}} + \sqrt[5]{32 - \frac{16}{n^9} + \frac{4}{n^{10}}}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{8} + \sqrt[5]{32}} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

4. Sea $b_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$. Entonces

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(\sqrt{n^2+n+1}-n)(\sqrt{n^2+n+1}+n)}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} \\ &= \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{2}$.

5. Ya sabemos que la sucesión recurrente definida por $u_1 = 7$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ converge. Trataremos de ver a qué converge.

Si $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ y $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a l. En efecto, si $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ es tal que si $n \geq n_0$, entonces $|u_n - l| < \varepsilon$, se tiene

$$n \geq n_0 \Rightarrow n+1 > n_0 \Rightarrow |u_{n+1} - l| < \varepsilon \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon.$$

Por el Teorema 1.5.6 (f),

$$\begin{aligned} l = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+u_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}(2+u_n)} \\ &= \sqrt{2+\lim_{n\to\infty} u_n} = \sqrt{2+l}. \end{aligned}$$

Pero

$$l^2 = 2+l \Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0 \Leftrightarrow (l-2)(l+1) = 0 \Leftrightarrow (l = 2 \text{ ó } l = -1).$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, se tiene que $l \geq 0$ y por lo tanto, $l = 2$.

6. Usando la misma técnica podemos probar que la sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$v_1 > 0, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{A}{v_n}\right),$$

donde $A > 0$, converge a $\sqrt{A}$.

Recordemos que este es el método de Newton para calcular raíces cuadradas y que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente y es decreciente (más bien $a_n \geq a_{n+1}$ para $n \geq 2$). Así que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (ver página 55). Sea $l = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Por lo tanto,

$$l = \lim_{n\to\infty} v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} v_n + \frac{A}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n}\right) = \frac{1}{2}l + \frac{A}{2l}$$

pero

$$l = \frac{1}{2}l + \frac{A}{2l} \Leftrightarrow \frac{1}{2}l = \frac{A}{2l} \Leftrightarrow l^2 = A \Leftrightarrow l = \sqrt{A} \text{ (pues } l \geq 0).$$

7. Sea $a_n = \dfrac{\begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix}}{(n+k)^k}$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\frac{(n+k)!}{n!\,k!}}{(n+k)^k} = \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)n!}{n!\,k!(n+k)^k} \\ &= \frac{n+k}{n+k}\cdot\frac{n+k-1}{n+k}\cdot\frac{n+k-2}{n+k}\cdots\frac{n+1}{n+k}\cdot\frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Pero para $1 \leq l \leq k$, el factor $\dfrac{n+l}{n+k}$ converge a 1. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+k}{n+k}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+k-1}{n+k}\right)\cdots\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+k}\right)\frac{1}{k!} \\ &= 1\cdot 1\cdots 1\cdot\frac{1}{k!} = \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

8. Sea $b_n = \left(\dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k} a_j^n\right)^{1/n}$ donde $a_j > 0$ para $j = 1,\ 2, \ldots,\ k$.

Sea $d = \text{máx}\,\{a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n\}$. Entonces, para cada $j = 1,\ 2, \ldots,\ k$, $\alpha \geq a_j$ y por lo tanto, $\alpha^n \geq a_j^n$, así,

$$\sum_{j=1}^{k} a_j^n \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha^n = k\alpha^n.$$

Luego,

$$\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j^n\right)^{1/n} \leq \left(\frac{1}{k}k\alpha^n\right)^{1/n} = \alpha \tag{1.8}$$

Por otro lado, como $\alpha \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$,

$$\sum_{j=1}^{k} a_j^n \geq \alpha^n,$$

luego,

$$\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j^n\right)^{1/n} \geq \left(\frac{1}{k}\alpha^n\right)^{1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{k}}\,\alpha. \tag{1.9}$$

Por (1.8) y (1.9) se tiene: $\dfrac{1}{\sqrt[n]{k}}\alpha \leq b_n \leq \alpha$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{k}}\,\alpha = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

9. Ahora probaremos que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, donde

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

Sea $e' = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ y sean, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\ , \qquad \beta_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Entonces $\beta_n \leq \alpha_n$ (Ejemplo 8, página 27). Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\,\beta_n \leq \lim_{n\to\infty}\,\alpha_n, \text{ es decir, } e' \leq e. \tag{1.10}$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\beta_m &= 1+1+\tfrac{1}{2!}\left(1-\tfrac{1}{m}\right)+\tfrac{1}{3!}\left(1-\tfrac{1}{m}\right)\left(1-\tfrac{2}{m}\right)\\
&+\cdots+\tfrac{1}{n!}\left(1-\tfrac{1}{m}\right)\left(1-\tfrac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\tfrac{n-1}{m}\right)\\
&+\cdots+\tfrac{1}{m!}\left(1-\tfrac{1}{m}\right)\left(1-\tfrac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\tfrac{m-1}{m}\right)\\
&\geq 1+1+\tfrac{1}{2!}\left(1-\tfrac{1}{m}\right)+\tfrac{1}{3!}\left(1-\tfrac{1}{m}\right)\left(1-\tfrac{2}{m}\right)\\
&+\cdots+\tfrac{1}{n!}\left(1-\tfrac{1}{m}\right)\left(1-\tfrac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\tfrac{n-1}{m}\right).
\end{aligned}$$

Esta última expresión, vista como sucesión a_m, converge a

$$\alpha_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

cuando $m \to \infty$ y fijando la n. Por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} \beta_m \geq \alpha_n, \quad \text{es decir, para toda } n \in \mathbb{N},\ e' \geq \alpha_n.$$

Por el Teorema 1.5.7,

$$e' \geq \lim_{n\to\infty} \alpha_n = e. \text{ Por eso } e' \geq e. \tag{1.11}$$

Por (1.10) y (1.11), $e' = e$

10. Sea $\gamma_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

    Entonces $\gamma_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ y por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

11. Sea $\delta_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

$$\begin{aligned}\delta_n &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n-1+1}{n-1}}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \\ &= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}.$$

12. Supongamos que $|x| < 1$. Como ya vimos,

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

Si $a_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$, entonces $a_n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ y por eso,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

13. Sea $\alpha_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$.

Si $m > n$, entonces $m = n + p$ con $p \in \mathbb{N}$ y así,

$$\begin{aligned}\alpha_m - \alpha_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+p)!} \\ &= \tfrac{1}{(n+1)!}\left[1 + \tfrac{1}{n+2} + \tfrac{1}{(n+3)(n+2)} + \cdots + \tfrac{1}{(n+p)(n+p-1)\cdots(n+2)}\right] \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right].\end{aligned}$$

Fijando n y haciendo tender m a ∞, queda:

$$\lim_{m\to\infty} (\alpha_m - \alpha_n)$$

$$\leq \lim_{p\to\infty} \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{p-1}\right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right] = \frac{1}{n!\,n} \qquad \text{(por el ejemplo anterior).}$$

Por lo tanto,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e - \alpha_n \leq \frac{1}{n!\,n}.$$

Esto nos da una idea de qué tanto se aproxima α_n al número e. Por ejemplo, α_{10} se aproxima a e con un error menor que 10^{-7}. Además podemos demostrar con esta desigualdad que e es un número irracional. Para ello, supongamos que e es un número racional; entonces

$$e = \frac{p}{q} \quad \text{con } p \text{ y } q \text{ naturales, pues } e > 0$$

(puede suponerse que $q > 1$ ¿por qué?). Por lo tanto,

$$0 < e - \alpha_q \leq \frac{1}{q!\,q}.$$

Así,

$$0 < q!\,(e - \alpha_q) \leq \frac{1}{q} < 1.$$

Pero $q!\,e = q!\,\dfrac{p}{q} = p(q-1)!$ es un entero y

$$q!\,\alpha_q = q!\left(1 + 1\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) = q! + q! + q(q-1)\cdots 3 + \cdots + 1$$

es también un entero, así que $q!\,(e-\alpha_q)$ es un entero entre 0 y $\dfrac{1}{q}$ y por lo tanto mayor que cero y menor que 1. Esto es una vil contradicción y por consiguiente, e no es racional.

14. Sean

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{u^2+n}},$$

$$v_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \text{y} \qquad w_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ y que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

$$\text{y} \quad \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ (ver Teorema 1.5.8).

15. Vamos a probar en este ejemplo que si para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = L$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. (Como corolario de este hecho, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, por ejemplo).

    (a) Supongamos que $L \neq 0$. Entonces $L > 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Puede suponerse que $L > \varepsilon$.
    Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = L$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
    $n \geq n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < \dfrac{a_n}{a_{n-1}} < L + \varepsilon$. Así, si $n \geq n_0$, se tiene

    $$a_{n-1}(L-\varepsilon) < a_n < a_{n-1}(L+\varepsilon).$$

    Por un lado se tiene:

    $$a_n < a_{n-1}(L+\varepsilon) < a_{n-2}(L+\varepsilon)^2 < \cdots < a_{n_0}(L+\varepsilon)^{n-n_0}. \tag{1.12}$$

    Por otro lado,

    $$a_n > a_{n-1}(L-\varepsilon) > a_{n-2}(L-\varepsilon)^2 > \cdots > a_{n_0}(L-\varepsilon)^{n-n_0}. \tag{1.13}$$

    Por (1.12) y (1.13) tenemos que

    $$n \geq n_0 \Rightarrow a_{n_0}(L-\varepsilon)^{n-n_o} < a_n < a_{n_0}(L+\varepsilon)^{n-n_0}.$$

    Tomando raíces, para $n \geq n_0$, se tiene que

    $$\sqrt[n]{a_{n_0}(L-\varepsilon)^{n-n_0}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_{n_0}(L+\varepsilon)^{n-n_0}}$$

o sea, para $n \geq n_0$, se tiene que

$$\sqrt[n]{a_{n_0}}(L-\varepsilon)^{\frac{n-n_0}{n}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_{n_0}}(L+\varepsilon)^{\frac{n-n_0}{n}}.$$

Por lo tanto, para $n \geq n_0$, se tiene que

$$\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(L-\varepsilon)^{n_0}}}(L-\varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(L+\varepsilon)^{n_0}}}(L+\varepsilon)$$

tomando límites queda:

$$L-\varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L+\varepsilon.$$

Así, podemos concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ (¿por qué?).

(b) Supongamos que $L = 0$. Sea $\varepsilon > 0$.
Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{a_n}{a_{n-1}} < \varepsilon$. Así, si $n \geq n_0$, se tiene:

$$0 \leq a_n < a_{n-1}\varepsilon < a_{n-2}\varepsilon^2 < a_{n-3}\varepsilon^3 < \cdots < a_{n_0}\varepsilon^{n-n_0} = a_{n_0}\frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^{n_0}}.$$

Por lo tanto, para $n \geq n_0$,

$$0 \leq \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{\varepsilon^{n_0}}}\varepsilon.$$

Tomando límites, $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \varepsilon$.
Como esto se vale para cualquier $\varepsilon > 0$, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0.$$

16. Sea $d_n = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$.

Si $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\dfrac{n!}{n^n}}{\dfrac{(n-1)!}{(n-1)^{(n-1)}}} = \frac{(n-1)^{n-1}n!}{n^n(n-1)!} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

pero $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{\frac{1}{e}}{1} = \dfrac{1}{e}$ (ver ejemplo 11, página 69). Por el teorema anterior, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{e}$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}.$$

Ejercicios 4.

1. ¿Sera cierto que si $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge? ¿por qué?

2. Demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

3. Compruebe cada uno de los siguientes límites

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1,$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{n^3+4} = 0,$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{4}{9}$, donde $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0.\underbrace{444\ldots4}_{n \text{ veces}}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$, donde $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0.\underbrace{333\ldots3}_{n \text{ veces}}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$, donde $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$,

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1} = 0,$ g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0,$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1,$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a,\, b) \ \ (a,\, b \geq 0)$,

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x^n + y^n}{2}\right)^{1/n} = x$ si $x \geq y > 0$,

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x^{-n} + y^{-n}}{2}\right)^{-\frac{1}{n}} = y$ si $x \geq y > 0$,

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k} a_j^{-n}\right)^{-\frac{1}{n}} = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ donde $a_j > 0$ para $j = 1, \ldots, k$.

4. Dada la sucesión $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ...

   (a) Demostrar que es creciente y acotada superiormente.

   (b) Hallar su límite.

5. Sea $v_1 = 1$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \dfrac{2}{v_n}\right)$. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \sqrt{2}$.

6. Demostrar mediante ejemplos que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la condición $a_n > 0$ para n suficientemente grande, no implica que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$.

7. a) Demostrar que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, entonces $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

   b) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $a \neq 0$ y $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

8. Dar ejemplos de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no convergentes (divergentes) tales que converja:

   a) $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, b) $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c) $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

   d) $(a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e) $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

9. Verificar que si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ y $a_n \geq b_n$ para n suficientemente grande, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.

10. Demuestre que si $p \in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = \infty$.

11. a) Probar que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ o si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

    b) Ver que el recíproco no es cierto, es decir, halle una sucesión que converja a 0 pero tal que $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ no diverja ni a ∞ ni a $-\infty$.

12. Dar ejemplos de sucesiones no acotadas pero que no diverjan ni a ∞ ni a $-\infty$.

13. Dar ejemplos de sucesiones que diverjan a ∞ pero no sean crecientes.

14. Demostrar:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\infty.$$

15. Demostrar que:

    i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, entonces

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$,

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = -\infty$.

    ii)

    (a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$,

    (b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.

    iii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, entonces:

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$,

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$.

iv) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, entonces:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \infty$.

v) Si $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n) = -\infty$, entonces:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \infty$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = -\infty$.

vi) Si $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = a \neq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n) = 0$, donde $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$, entonces

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ si $a > 0$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = -\infty$ si $b < 0$.

16. Sea $p \in \mathbb{N}$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ y definimos $b_n = a_{n+p}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$. Si $\forall n > p$, $c_n = a_{n-p}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$.

17. Demostrar que

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n = e^2$ (sugerencia: $1 + \frac{2}{n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$),

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^n = e^3$,

(c) Si $p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{p}{n}\right)^n = e^p$ (sugerencia: use inducción sobre p),

(d) Si $p \in \mathbb{Z}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{p}{n}\right)^n = e^p$
(usar (c) y ejemplo 11, página 69).

(e) Si $q \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\frac{1}{q}}{n}\right)^n = e^{\frac{1}{q}}$

(sugerencia: probar primero que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q\,n}\right)^{q\,n} = e$$

y usar después que $\left(1+\dfrac{\frac{1}{q}}{n}\right)^n = \left(\left(\left(1+\dfrac{1}{qn}\right)^{qn}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$.

(f) Usar (e) y (d) para concluir que

$$\text{Para cada } R \in \mathbb{Q},\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{R}{n}\right)^n = e^R$$

(hacer $R = \dfrac{p}{q}$ con $p \in Z$ y $q \in \mathbb{N}$).

Miscelánea I

1. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (suponiendo que existe), siendo $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$ y sabiendo que $4a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4}$ para $n > 4$.
(Sugerencia: Probar que si $n > 4$, $4a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3} = 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1$).

2. a) Si $a_n \geq 0$ y $a_{n+1} < Ka_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donde $0 < K < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

   b) Si $|a_{n+1}| < K|a_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donde $0 < K < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$ y $-1 < l < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

   b) Determine el comportamiento de $a_n = n^r x^n$ cuando $n \to \infty$ donde $x \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{N}$ (por ejemplo, si $0 < x < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$).

c) Determine el comportamiento de $a_n = \dfrac{x^n}{n^r}$ para $x \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{N}$.

d) Pruebe que para toda $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

4. Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ (use el Ejemplo 15, página 72).

5. Pruebe que si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = a$, donde $\forall n \in N$,

$$S_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Dése un ejemplo en donde $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja pero $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no.

6. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $I_n = [a_n, b_n]$ y

$$a) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \subset I_n, \qquad b) \quad \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tienen el mismo límite x_0 y x_0 es el único número tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in I_n$.

Capítulo 2

LÍMITES Y CONTINUIDAD

§1

2.1 Límite (de una función en un punto)

Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, puede no estar definida en cierto número x_0, pero sí "cerca" de él. De tal forma que, aunque no conozcamos $f(x_0)$ (que puede no tener senido), podemos preguntarnos qué le pasa a la función cuando nos acercamos a x_0. Precisemos primero qué significa "cerca" de x_0. Para ello, llamaremos *vecindad de radio* $\delta > 0$ con centro en x_0 (ó simplemente, vecindad de x_0 de radio $\delta > 0$) a un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$. Que una función f esté definida "cerca" de x_0 significa sencillamente que f está definida por lo menos en alguna vecindad de x_0 de algún radio $\delta > 0$, excepto posiblemente, en x_0, es decir, que exista $\delta > 0$ tal que f está definida en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ excepto posiblemente, en x_0. Así que, si f está definida en una vecindad $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, excepto posiblemente en x_0, estamos interesados en estudiar el comportamiento de las imágenes de f para valores muy próximos a x_0; observemos lo que ocurre, por ejemplo, con la función $f(x) = 1 + x^3$, en $x_0 = 0$:

$$
\begin{array}{llll}
x_1 = 1 & \Rightarrow f(x_1) = 2; & x_1' = -1 & \Rightarrow f(x_1') = 0; \\[2ex]
x_2 = \frac{1}{2} & \Rightarrow f(x_2) = 1 + \frac{1}{8}; & x_2' = -\frac{1}{2} & \Rightarrow f(x_2') = 1 - \frac{1}{8}; \\[2ex]
x_3 = \frac{1}{3} & \Rightarrow f(x_3) = 1 + \frac{1}{27}; & x_3' = -\frac{1}{3} & \Rightarrow f(x_1') = 1 - \frac{1}{27}; \\[2ex]
x_4 = \frac{1}{4} & \Rightarrow f(x_4) = 1 + \frac{1}{64}; & x_4' = -\frac{1}{4} & \Rightarrow f(x_1') = 1 - \frac{1}{64}; \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\[2ex]
x_n = \frac{1}{n} & \Rightarrow f(x_n) = 1 + \frac{1}{n^3}; & x_n' = -\frac{1}{n} & \Rightarrow f(x_1') = 1 - \frac{1}{n^3}. \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Podemos ver que, a medida que los valores de x_n o de x_n' se acercan a cero, los valores de $f(x_n)$ o $f(x_n^{'})$ se aproximan a 1. Si escogemos otra forna de acercarnos, por ejemplo con la sucesión $\left((-1)^n\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, efectuando los cálculos pertinentes, comprobamos que ocurre lo mismo. Más aún, esto ocurre con cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a cero: $f(x_n) = 1 + x_n^3$ converge a 1.

Analicemos ahora la siguiente función, también en $x_0 = 0$

$$
f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}
$$

Aproximémonos a cero con las dos primeras sucesiones del ejemplo anterior. Para la sucesión $x_n = 1/n$, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1, en tanto que para la sucesión $x_n' = -\dfrac{1}{n}$ la sucesión $(f(x_n'))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a -1.

En este capítulo nos interesa estudiar las funciones reales en aquellos puntos donde tienen un comportamiento similar al comportamiento de la función $f(x) = 1 + x^3$ en el punto $x_0 = 0$, es decir, puntos en donde, al elegir valores del dominio de f próximos a x_0, se obtienen valores de $f(x)$ cercanos a algún número real L. Cuando esto ocurre, a L se le llama el límite de los valores de $f(x)$ cuando x tiende a x_0. Formalmente enunciamos lo siguiente.

Definición 2.1.1 Supongamos que f está definida en una vecindad de x_0, $(x_0+\delta, x_0-\delta)$, excepto quizás en x_0. Diremos que $L \in \mathbb{R}$ es el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 si y sólo si para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el dominio de f tal que $x_n \neq x_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

A la proposición "L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0" la denotamos así:

$$L = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Antes de pasar a los ejemplos observemos que dado cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$ siempre es posible encontrar una sucesión de racionales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión de irracionales $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. En efecto, construyamos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con las características mencionadas: dado que entre dos números reales siempre es posible encontrar un número racional, elegimos para cada $n \in \mathbb{N} : x_n$ tal que

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 - \frac{1}{n+1} < x_0$$

y entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty}\left(x_0 - \frac{1}{n+1}\right)$$

es decir $x_0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq x_0$. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to x_0} x_n = x_0$.

Siguiendo un procedimiento análogo se puede construir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con las caracteristicas mencionadas (Ejercicio para el lector).

Ahora sí, pasemos a los ejemplos.

Ejemplos:

1. Mostremos que $\lim\limits_{n\to 4}\sqrt{x} = 2$, verificando que se satisface la definición: sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cualquier sucesión tal que $\lim\limits_{x\to x_0} x_n = 4$. Por el Teorema 1.5.6 (f), $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{4} = 2$.

2. Ahora veremos que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = 3$.

   En efecto, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ y $x_n \neq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces los términos de la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ pueden también ser escritos como $f(x_n) = \dfrac{x_n^3-1}{x_n-1} = x_n^2 + x_n + 1$. A partir de esto y aplicando el Teorema 1.5.6 (a) y (c) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + x_n + 1) = 3.$$

   Observación: este ejemplo muestra que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ puede existir a pesar de que f no esté definida en x_0. Puede ocurrir también que, aún cuando $f(x_0)$ exista, no se tenga que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, como se ve en el siguiente ejemplo.

3. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   Entonces, como puede comprobar el lector, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ pero $f(0) = 1$. Por consiguiente $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

4. Sea $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Investiguemos si existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Sea $x_n = \dfrac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ y se tiene que $f(x_n) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, así que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$. En realidad, esto ocurre con cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de términos positivos que converja a cero ya que $|x_n| = x_n$. Sin embargo, no podemos, a partir de esto, afirmar que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ ya que no hemos analizado todas las sucesiones que convergen a cero. Si, por ejemplo $x_n = -\dfrac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$f(x_n) = \frac{|-\frac{1}{n}|}{-\frac{1}{n}} = -1.$$

Así, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -1$. Hemos encontrado entonces dos sucesiones,

$$(1/n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{y} \qquad (-1/n)_{n\in\mathbb{N}},$$

que convergen a cero, pero tales que

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{-1}{n}\right) = -1.$$

Esto demuestra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe, pues la definición exige que, cualesquiera sean las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tengan como límite a cero (y de términos distintos de cero), las sucesiones $(f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ deben tener el mismo límite.

A continuación dibujamos la gráfica de esta función:

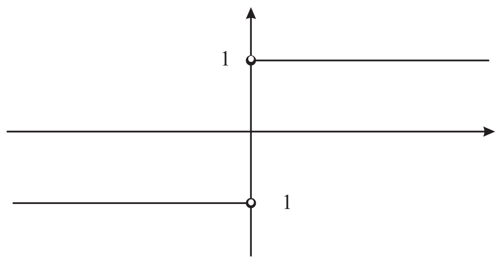


Figura 2.1

5. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para $x \neq 0$. Consideremos $x_n = \dfrac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$; entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ y se tiene que $f(x_n) = n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y por tanto $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene límite (pues no es acotada). Concluimos así que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe.

6. Sea
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

Como ya se observó antes, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N} : x_n \in \mathbb{Q}$ y $y_n \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $\lim\limits_{x\to x_0} x_n = x_0$

y $\lim\limits_{x\to x_0} y_n = x_0$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0.$$

De esta manera concluimos que, no importa quién sea $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ no existe.

7. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Luego, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ ya que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a cero, entonces

$$f(x) = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x_n \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

la cual converge a cero. Sin embargo, se tiene que para cualquier otro punto x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ no existe. Efectivamente, para $x_0 \neq 0$ se tiene que $x_0 \in \mathbb{Q}$ ó $x_0 \notin \mathbb{Q}$

i) Si $x_0 \in \mathbb{Q}$, entonces existe una sucesión de números irracionales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$; de aquí que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. También existe una sucesión de números racionales $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$$

De aquí, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = x_0 \neq 0$. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ no existe, pues existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes a x_0, pero

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

ii) Si $x_0 \notin \mathbb{Q}$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ tampoco existe. Su demostración es análoga al caso anterior y lo dejamos como ejercicio para el lector.

Observación: este ejemplo muetra que existen funciones que únicamente tienen límite en un punto, es decir, la propiedad de que una función tenga límite es una propiedad local (puntual).

Antes de proseguir con nuestra teoría de límites, hagamos algunos comentarios acerca de la Definición 2.1.1.

1. Como estamos interesados en saber cómo se comporta f cerca del punto x_0, debemos poder acercarnos a dicho número como y por donde queramos y siempre sin salirnos del dominio de f; por eso, debemos suponer que f está definida, por lo menos, en un intervalo $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, excepto quizá en x_0, es decir, el dominio de f debe contener algún conjunto de la forma

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

   (El lector debe comprobar la equivalencia de $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ con $0 < |x - x_0| < \delta$).

2. La petición de que $x_n \neq x_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ es muy importante pues puede ocurrir que:

   i) La función f no esté definida en x_0, en cuyo caso $f(x_0)$ no estaría definida para aquellas $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x_0$ (ver ejemplo 2).

   ii) Aún cuando f esté definida en x_0, en cuyo caso $f(x_n)$ no esté próximo a L (ver ejemplo 3).

3. Si usamos la definición de límite de una sucesión, dada en el Capítulo 1, podemos dar una definición equivalente a nuestra Definición 2.1.1 (ver ejercicio 6 de esta sección):

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{para toda } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que si} \\ 0 < |x - x_0| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon. \end{array}$$

Es decir, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un intervalo $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ tal que para cualquier x que no sea x_0 y que esté en dicho intervalo, $f(x)$ está en el intervalo $(L-\varepsilon,\, L+\varepsilon)$. Gráficamente esto significa que la parte de la gráfica que queda por encima de $(x_0-\delta,\, x_0+\delta)$ está contenida en la región limitada por las rectas

$$y = L-\varepsilon \qquad \text{y} \qquad y = L+\varepsilon.$$

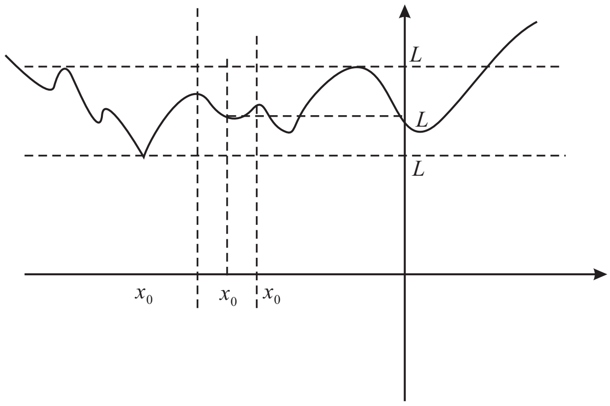


Figura 2.2.

Ejercicios 1.

1. Hallar el límite indicado de la función dada, empleando la definición:

   a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2$, b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$, c) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x+6)$,

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x+2}{x^2+1}$, e) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5)(x+1)^2$.

2. En cada uno de los siguientes casos, hallar un $\delta > 0$ tal que

   $$|f(x)-L| < \varepsilon \text{ para toda } x \text{ que satisface } 0 < |x-x_0| < \delta.$$

   (a) $f(x) = x^4,\ L = x_0^4$, (b) $f(x) = 1/x,\ \ x_0 = 1,\ L = 1$,

   (c) $f(x) = x^4 + 1/x,\ \ x_0 = 1,\ L = 2$,

(d) $f(x) = \sqrt{|x|}, \;\; x_0 = 0, \; L = 0,$

(e) $f(x) = \sqrt{x}, \;\; x_0 = 1, \; L = 1.$

3. Probar que si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ y $|h(x)| \leq M$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x\to 0} g(x)h(x) = 0.$$

4. Sea f la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } 0 < x < 5, \\ 1 & \text{si } 5 \leq x. \end{cases}$$

¿Para qué valores de $x_0 \in \mathbb{R}$ existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ y para qué valores de x_0 no existe?

5. Demostrar que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - L) = 0$.

(Sugerencia: defínase $g(x) = f(x) - L$).

6. Probar que:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \;\; \Leftrightarrow \;\; \forall \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

(Sugerencia para la implicación directa hacerlo por contrapositiva: suponga que existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe un x tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ pero $|f(x) - L| \geq \varepsilon$. Entonces
para $\delta_1 = 1$, existe x_1 tal que $0 < |x_1 - x_0| < 1$ y $|f(x_1) - L| \geq \varepsilon$
para $\delta_2 = 1/2$, existe x_2 tal que $0 < |x_2 - x_0| < 1/2$ y $|f(x_2) - L| \geq \varepsilon$
para $\delta_3 = 1/3$, existe x_3 tal que $0 < |x_3 - x_0| < 1/3$ y $|f(x_3) - L| \geq \varepsilon$
$\vdots$
para $\delta_n = 1/n$, existe x_n tal que $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ y $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$

La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene todos sus términos distintos de x_0 y converge a x_0 (¿por qué?) pero $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a L).

7. Explíquese por qué son correctas las siguientes equivalencias de
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$
   (a) Para toda $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda x, si $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ entonces $|f(x) - L| < \delta$,
   (b) Para toda $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda x, si $0 < |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{10}$ entonces $|f(x) - L| < \delta$.

8. Dar ejemplos para demostrar que las siguientes definiciones de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ NO son correctas:
   (a) Para toda $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$,
   (b) Para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|f(x) - L| < \varepsilon$, entonces $0 < |x - x_0| < \delta$.

   Sugerencia: en ambos casos considere la función
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

§2

2.2 Operaciones con límites

En esta sección se reproducirán para las funciones, los teoremas probados en el capítulo anterior acerca de la suma, producto, cociente y raíces de sucesiones. Los más inmediatos se enuncian a continuación.

Teorema 2.2.1 *Supongamos que* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ *y que* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, *con* A *y* B *en* $\mathbb{R}$. *Entonces*

a) $\lim\limits_{x\to x_0} (f + g)(x) = A + B$, *b)* $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = AB$,

c) $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$ *siempre que* $B \neq 0$,

d) si $f(x) \geq 0$ *(cerca de* x_0*),* $\lim_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{A}$ *para toda* $k \in \mathbb{N}$.

La demostración de este teorema es tan sencilla que la mayor parte del espacio dedicada a ella, lo ocupan los siguientes comentarios:

1. Al suponer que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existen, estamos suponiendo tácitamente que f está definida en un conjunto $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) - \{x_0\}$ al menos y g en un conjunto $(x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) - \{x_0\}$ mínimamente, donde $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$. Así que f y g están definidas al mismo tiempo en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ donde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Por lo menos en dicho intervalo "agujerado" tienen sentido $f + g$ y $f \cdot g$ y nos podemos acercar a x_0 por puntos del dominio de cada una de estas funciones y diferentes de x_0.

2. Si $B \neq 0$, se puede probar que existe un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$, entonces $g(x) \neq 0$. Por ejemplo, si $B > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|g(x) - B| < B/2$ ya que $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$. Por consiguiente $0 < |x - x_0| < \delta$ implica que $-\frac{B}{2} < g(x) - B < \frac{B}{2}$ lo cual implica que $0 < \frac{B}{2} < g(x)$. Así pues, en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ tiene sentido $\frac{f(x)}{g(x)}$.

3. Si $f(x) \geq 0$ en un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ excepto quizá en x_0 y si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ que converge a x_0, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f(a_n) \geq 0$ y $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = A$. Por consiguiente, $A \geq 0$ y se puede hablar de $\sqrt[k]{A}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

4. Como se recordará, existen sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente sin que necesariamente

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sean sucesiones convergentes (ver observación en la página 62 del Capítulo 1). De igual forma, si consideramos

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

para toda $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $(f+g)(x) = 1$, lo cual implica que $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = 1$ cualquiera que sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Sin embargo, como ya se vió en el ejemplo 6 de la sección anterior $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ no existen cualquiera que sea $x_0 \in \mathbb{R}$.

¿Puede el lector dar ejemplos similares al caso anterior para los incisos b), c) y d) del Teorema 2.2.1? Le sugerimos que modifique el ejemplo anterior para los casos b) y c).

Con el objeto de ilustrar el método seguido para probar las afirmaciones del teorema, probaremos únicamente d) dejando las demás como ejercicio para el lector.

Demostración de d): Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x_0 y $a_n \neq 0$, entonces $f(a_n) \geq 0$ para casi toda n y $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A pues $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Por el Teorema 1.5.6 ($f$), se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{(f(a_n))} = \sqrt[k]{A},$$

lo cual prueba lo que deseábamos. ■

Otro utilísimo ejercicio para el lector es lo siguiente.

Teorema 2.2.2 *(a) Si cerca de x_0, se tiene que $f(x) \leq g(x)$ y $A, B \in \mathbb{R}$ son tales que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, entonces $A \leq B$,*
(b) Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ (cerca de x_0) y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

El siguiente resultado es de gran utilidad para calcular ciertos límites.

Teorema 2.2.3 *Si* $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$*,* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ *y existe* $\delta_1 > 0$ *tal que*

$$\textit{para cada } t \in (t_0 - \delta,\ t_0 + \delta) - \{t_0\}, \qquad g(t) \neq x_0, \tag{2.1}$$

entonces

$$\lim_{t\to t_0}(f \circ g)(t) = A.$$

Demostración: Lo primero que tenemos que ver es que $f \circ g$ está definida en una vecindad de t_0. Como $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe entonces podemos considerar $\varepsilon > 0$ tal que f está definida en $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon) - \{x_0\}$ y como $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$ entonces por la Observación (3) de la página 86 se tiene existe $\delta' > 0$ tal que si $0 < |t - t_0| < \delta'$ entonces $g(t) \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$. Además, por hipótesis, si $0 < |t - t_0| < \delta$, entonces $g(t) \neq x_0$. Por lo tanto, si $\delta = \min\{\delta_1,\ \delta'\}$ y $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) - \{t_0\}$, se cumple que $g(t) \neq x_0$ y $g(t) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) - \{x_0\}$, que es donde al menos f está definida; es decir $f \circ g$ está definida en $(t_0 - \delta,\ t_0 + \delta) - \{t_0\}$ y para toda $t \in (t_0 - \delta,\ t_0 + \delta) - \{t_0\}$, se tiene que $g(t) \neq x_0$.

Finalmente, considérese $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $(t_0 - \delta,\ t_0 + \delta) - \{t_0\}$ convergente a t_0 (Esto se puede hacer pues para n suficientemente grande t_n es próximo a t_0). Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = x_n$ y $\forall n \in \mathbb{N}\ \ g(a_n) \neq x_0$. Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} f(g(a_n)) = A$. Por consiguiente $\lim\limits_{t\to t_0} f \circ g(t) = A$. ■

La hipótesis (2.1) es necesaria y no es implicada por la sola suposición de que $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Por ejemplo si $g(t) = 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$ y $f(x) = 0$ para $x \neq 0$ pero no está definida en $x = 0$, entonces $\lim\limits_{t\to 0} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ pero $f(g(t))$ no está definida en ninguna vecindad de $t_0 = 0$. Más aún, aunque f esté definida en x_0 puede no satisfacer (2.1): si $g(t) = 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$ y $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ y $f(x) = 1$ si $x = 0$, entonces $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ pero para toda $t \in \mathbb{R}\ \ f(g(t)) = 1$ y por esta razón $\lim\limits_{t\to 0} f(g(t)) = 1$. El lector puede revisar fácilmente que en este ejemplo no se satisface la condición (2.1) del Teorema 2.2.3.

Ejemplos:

1.

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{4-x^2+\sqrt{x+2}+5x^3}{x^2+15}}=\sqrt{\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2+\sqrt{x+2}+5x^3}{x^2+15}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 2}(4-x^2+\sqrt{x+2}+5x^3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+15)}}=\sqrt{\frac{4-4+\sqrt{4}+40}{4+15}}=\sqrt{\frac{42}{19}}.$$

Los pasos dados aquí son tentativos y se justifican al llegar a una expresión para la cual existe el límite. En este caso, como

$$\lim_{x\to 2}(4-x^2+\sqrt{x+2}+5x^3)$$

existe y $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+15)$ también existe y no es cero, existe entonces el límite del cociente de estas dos funciones y todos los demás límites señalados.

2. Si $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$, $f(x)$ no está definida en $x=a$. Además

$$\lim_{x\to a}(x^2-a^2)=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a}(x-a)=0.$$

Por consiguiente, no podemos aplicar directamente el Teorema 2.2.1 para decir que

$$\lim_{x\to a}f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a}(x^2-a^2)}{\lim\limits_{x\to a}(x-a)}.$$

Sin embargo, para toda $x\neq a$ se tiene que

$$f(x)=\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=x+a.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}(x+a)=a+a=2a.$$

3. Si $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, en $x=2$, el polinomio x^2-3x+2 tiene una raíz (es decir, se hace cero), así que g no está definida en 2. Sin embargo,

$$g(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1} \text{ si } x \neq 2.$$

Así,

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-1} = 4.$$

4. Vamos a hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. No podemos usar el teorema acerca del cociente de funciones ya que $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[3]{1+x}-1) = 0$. Pero, recordando que para $a, b \in \mathbb{R}$ se cumplen

$$a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b} \qquad \text{y} \qquad a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

tendremos:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} &= \frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)}+1)(1+x-1)}{(1+x-1)(\sqrt{1+x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}.\end{aligned}$$

Ahora sí, el numerador y el denominador tienen límite cuando $x \to 0$ y el límite del denominador no es cero. Por ende

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right]}{\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{1+x}+1\right]} = \frac{3}{2}.$$

5. Sea $f(x) = x^2$. Vamos a calcular $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Aquí, de nuevo el límite del denominador es cero y por esta razón no podemos aplicar el teorema acerca del cociente de funciones. Sin embargo, se tiene que:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$$

Por lo tanto

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = \lim_{h\to 0} 2x + \lim_{h\to 0} h = 2x$$

6. En este ejemplo vamos a probar que si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = A$ entonces $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(x_0+t)-F(x_0)}{t} = A$.
   Para demostrarlo definimos las siguientes funciones
   $$f(x) = \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \qquad \text{y} \qquad x = g(t) = x_0 + t.$$
   Entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ por hipótesis y $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = x_0$.
   Ahora, como $g(t) \neq x_0$ para toda $t \neq 0$, se tiene que se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.2.3 y por lo tanto
   $$\lim_{t\to 0} f(g(t)) = A \qquad \text{y} \qquad f(g(t)) = f(x_0+t) = \frac{F(x_0+t)-F(x_0)}{t}.$$

7. Sean $g(t) = 1-t^2$ y $f(x) = \sqrt{x}$. Entonces $\lim\limits_{t\to t_0}(1-t^2) = 1-t_0^2$ para cualquiera $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ siempre que $x_0 > 0$. Ahora, para $-1 < t_0 < 1$ se cumple que $x_0 = 1-t_0^2 > 0$ y, por lo tanto, se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.2.3 el cual implica que
   $$\lim_{t\to t_0}(f\circ g)(t) = \lim_{t\to t_0}\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-t_0^2}.$$

8. Sean $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$ y $g(x) = \begin{cases} t & \text{si } t<0 \\ t^2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$. Entonces, para $t_0 = 0$,
   $$\lim_{t\to t_0} g(t) = 0 = x_0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$
   Por consiguiente, dado que se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.2.3 se tiene que $\lim\limits_{t\to 0} f(g(t)) = 0$.

En ocasiones existen los límites laterales aunque no exista el límite. Por *límite lateral* se entiende que nos aproximamos al punto x_0 por un sólo lado: por la derecha ó por la izquierda. Precisamos esto en lo siguiente.

Definición 2.2.1 Si para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_0 < x_n$ para toda $n \in N$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$ diremos que L es el **límite derecho** (o desde arriba) de $f(x)$ cuando x tiende a x_0.

La proposición L es el límite derecho de $f(x)$ cuando x tiende a x_0, se escribe así:

$$L = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \qquad \text{o} \qquad L = \lim_{x\downarrow x_0} f(x) \qquad \text{o} \qquad \lim f(x_0+0) = L.$$

De manera análoga, L es el **límite izquierdo** (o límite por la izquierda o límite desde abajo) de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 si para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n < x_0$ para toda n y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$. La notación en este caso es:

$$L = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\uparrow x_0} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim f(x_0-0) = L.$$

Por supuesto que para hablar del límite derecho de una función f cuando x tiende a x_0 no necesitamos que f esté definida a la "izquierda" de x_0 sino solamente en algún intervalo abierto

$$(x_0,\ x_0+\delta) = \{x : x_0 < x < x_0+\delta\}.$$

Además debe ser claro que:

1. i) $L = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \Leftrightarrow$ para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para toda x, si $0 < x - x_0 < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ (la condición $0 < x - x_0 < \delta$ es equivalente a: $0 < |x - x_0| < \delta$ y $x > x_0$).

   ii) $L = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \Leftrightarrow$ para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $0 < x_0 - x < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Es también un ejercicio fácil, demostrar que:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$ existen $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ y son iguales a L.

Sigamos con los ejemplos:

9. Sea $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 0, \\ -x & \text{si } 0 \leq x. \end{cases}$

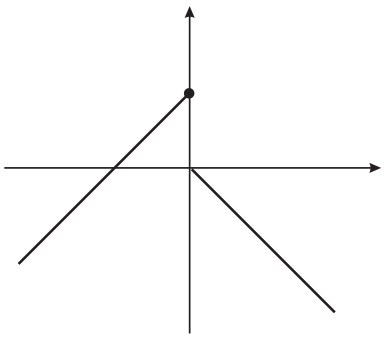


Figura 2.3

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de términos negativos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 2$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$. Ahora, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de términos positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Por esta razón $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. En este ejemplo, aunque existen los límites derecho e izquierdo de $f(x)$ cuando x tiende a cero, dichos límites no son iguales y por lo tanto no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

10. Parecido es el caso de $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ ya que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

y para esta función se tiene que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$.

Ejercicios 2.

1. Para las funciones f y g definidas en los ejercicios (a) a (d), determine las funciones $f+g$, $f-g$, fg y $\dfrac{f}{g}$ y calcule los límites indicados de estas cuatro funciones, calculando primero los límites de f y g y utilizando luego los teoremas de esta sección.

   (a) $f(x) = x^2$, $\quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ cuando $x \longrightarrow 3$,

   (b) $f(x) = x^2$, $\quad g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ $\quad$ cuando $x \longrightarrow 1$,

   (c) $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad g(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ $\quad$ cuando $x \longrightarrow 1$,

   (d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 2x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } z \leq 0 \end{cases}$
   cuando $x \to 0$

2. Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$, ¿es fg la misma función que la dada por $h(x) = x$? ¿Por qué?

3. Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $h(x) = x^3$, ¿cuáles son los valores de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} (fh)(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} (f/h)(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} (gh)(x)$? ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{f}{h}\right)(x)$?

En los ejercicios 4 y 5 está la gráfica de una función. Decida cuáles de los límites propuestos existen y evalúelos.

4. (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, (b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, (c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, (d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

   La gráfica de f es:

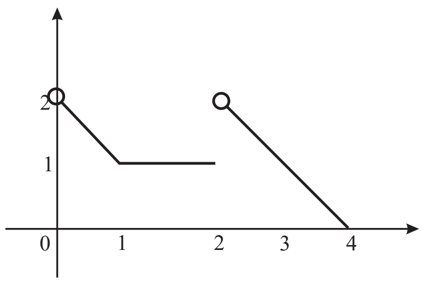


Figura 2.4

5. (a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, (b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, (c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, (d) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$,

   siendo la gráfica de f :

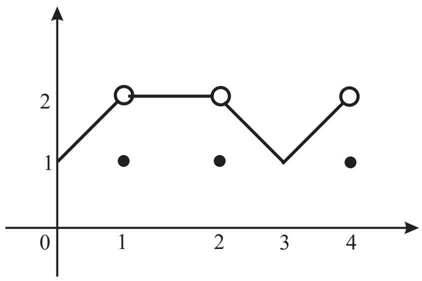


Figura 2.5

6. Encuentre los límites siguientes y en cada caso, señale el teorema de límites que lo justifica.

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} 3x$, (b) $\lim\limits_{x\to 3}(4x+3)$, (c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-1}{2x+2}$,

   (d) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{5+\sqrt[3]{2x^3}}$, (e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$, (f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$,

   (g) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$, (h) $\lim\limits_{x\to y}\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$, (i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$,

7. En los siguientes ejercicios efectúe la composición $f\circ g$ y calcule $\lim\limits_{t\to t_0}(f\circ g)(t)$ y compare su resultado con el que se obtiene al aplicar el Teorema 2.2.3.

(a) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0 \qquad g(t) = t^2, \qquad t_0 > 0,$

(b) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0 \qquad g(t) = t + \sqrt{t}, \qquad t > 0,\ t_0 = 1,$

(c) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}, \quad x > 0 \qquad g(t) = t + \sqrt{t}, \qquad t > 0,\ t_0 > 0.$

8. Demuestre que el inverso del Teorema 2.2.3 no es válido. (Sugerencia: considere las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 - t^2 & \text{si } |t| \leq 2 \\ 2 & \text{si } |t| > 2). \end{cases}$$

9. Demostrar que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a + h).$$

§3

2.3 Límites (2da. Parte)

En los ejemplos tratados en la Sección 2.1 no estudiamos casos como $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (que significa que $f(x)$ se hace cada vez "más grande" cuando x se "aproxima" más a x_0), pues en la Definición 2.1.1, x_0 y L se restringieron a valores reales. En realidad, en la definición de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ tanto x_0 como L pueden remplazarse por ∞ o $-\infty$ y estos son los casos que trataremos en esta sección. En este sentido damos la siguiente definición.

Definición 2.3.1 (a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos en el dominio de f y de puntos distintos de x_0 tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, se tiene que $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el dominio de f tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el dominio de f tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el dominio de f con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$.

Antes de ver algunos ejemplos, hagamos algunas observaciones importantes acerca de la Definición 2.3.1.

Observación:

1. En los incisos (b) y (c) estamos suponiendo que la función está definida en un intervalo de la forma $(x_0,\ \infty)$ dónde $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo.

2. En el inciso (d) hay que suponer que f está definida en un intervalo de la forma $(-\infty,\ x_0)$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. Para este tipo de límites tenemos equivalencias análogas a la dada en la observación (3) de la página 86:

   (a)$'$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall M > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $f(x) > M$.

   (b)$'$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon > 0, \exists\ M > 0$ tal que si $x > M$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

   (c)$'$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall M > 0, \exists\ N > 0$ tal que si $x > N$, entonces $f(x) > M$.

   (d)$'$ ejercicio para el lector

En el siguiente capítulo veremos, como una aplicación de la derivada, graficación de funciones, para lo cual es importante saber calcular límites como los que estudiamos en esta sección, lo cual nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.3.2 (1) Una recta no vertical $y = mx + b$ es una **asíntota** de la gráfica de $y = f(x)$ si y sólo si

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \text{ o bien } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

(2) La recta vertical $x = c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de $y = f(x)$ si y sólo si

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = \infty.$$

Ahora sí, pasemos a los ejemplos.

Ejemplos:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ ya que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ y $x_n \neq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2} = \infty$.

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ pues si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que diverge a ∞, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2} = 0$.

3. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si $f(x) = x$ para toda $x \in \mathbb{R}$. En efecto si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = a_n$.

4. Si $f(x) = x$, entonces $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ pues para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

   Antes de continuar con los ejemplos notemos que el Teorema 2.2.1 no es válido en general cuando tenemos límites infinitos y límites al infinito. Por ejemplo:

   (a) Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = -x$, entonces $(f + g)(x) = 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$ lo cual implica que $\lim_{x\to\infty} (f + g)(x) = 1$ pero $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ (ver ejercicio 1). Por lo tanto $\lim_{x\to\infty} (f + g)(x) \neq \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$ ya que $\infty + (-\infty)$ no está definido.

(b) Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ entonces para toda $x \in \mathbb{R}$, $(fg)(x) = 1$; por consiguiente $\lim\limits_{x\to 0} fg(x) = 1$, pero $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0} fg(x) \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x) \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ pues $0 \cdot \infty$ no está definido.

Se deja como ejercicio al lector ver si los incisos restantes del Teorema 2.2.1 se cumplen.

Sin embargo, hay algunos hechos sencillos acerca de los límites infinitos que se pueden reconocer de manera más o menos fácil. Por ejemplo: si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$ donde $L \in \mathbb{R}$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \infty$ (Ver ejercicio 15 de Ejercicios 4 de la página 15.) y si $L \neq 0$

$$\lim_{x\to x_0} (fg)(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si } L > 0, \\ -\infty, & \text{si } L < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

En este caso, si $L = 0$ entonces hay que tener cuidado en hacer afirmaciones como (2.2): por ejemplo, las funciones

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}, \qquad g(x) = (x-2)^2$$

satisfacen que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2} g(x) = 0$$

y además $\lim\limits_{x\to 2} fg(x) = 1$ pues $(fg)(x) = 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Es un ejercicio para el lector construir funciones f y g tal que $\lim\limits_{x\to 2} fg = \infty$ y funciones f_1, g_1 tal que $\lim\limits_{x\to 2} f_1 g_1 = 0$.

En los casos en que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ no se puede decir nada acerca del comportamiento de $f+g$ sin hacer un examen más detallado de las funciones que se esten dando. (Ver ejercicios 12(h), 12(i) y 12(j)).

Continuemos con los ejemplos:

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2-3/x)(3+5x)(4-6/x)}{3+1/x^2-1/x^3}$
$= \dfrac{(2)(3)(4)}{3} = 8$. ¿Por qué es válido el Teorema 2.2.1 en este caso?

6. Sea $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$. Cuando x tiende a ∞, tanto el numerador como el denominadar de f divergen a ∞. Sin embargo, si dividimos dichos términos entre x, queda $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{10}{x^3}}}$. Por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1.$$

7. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ pues $f(x) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}$. Se deja como ejercicio para el lector que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. Por lo tanto $y = 1$ es una asíntota horizontal y como $\lim\limits_{x\to 1}|f(x)| = \infty$ se tiene que $x = 1$ es una asíntota vertical. Con esta información podemos esbozar la gráfica de la función:

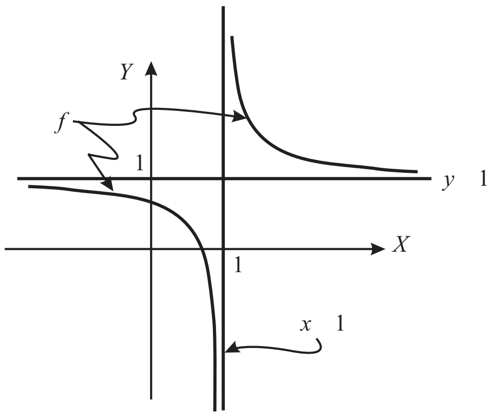


Figura 2.6

8. En este ejemplo probaremos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$ usando la observación (3) de la página 86. Sea $M > 0$. Notemos que

$$\frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow \frac{1}{M} > x^2 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Por consiguiente, si $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ se tiene que para $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x| < \delta$, $|f(x)| > M$, lo cual quiere decir que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Por lo tanto $x = 0$ es una asíntota vertical. Como el lector podrá comprobar, $y = 0$ es una asíntota horizontal. Entonces podemos esbozar la gráfica de la función:

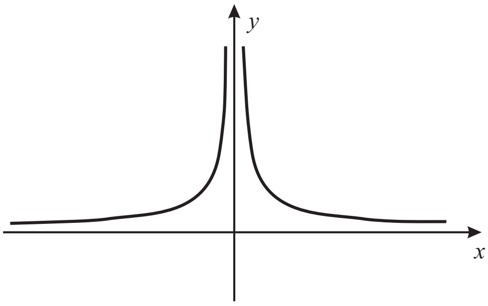


Figura 2.7

9. Sea $f(x) = x + \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ y dado que $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ entonces $x = 0$ es una asíntota vertical para la gráfica de f y $y = x$ es una asíntota para la gráfica de f. Por lo tanto,la gráfica de la función quedaría más o menos así:

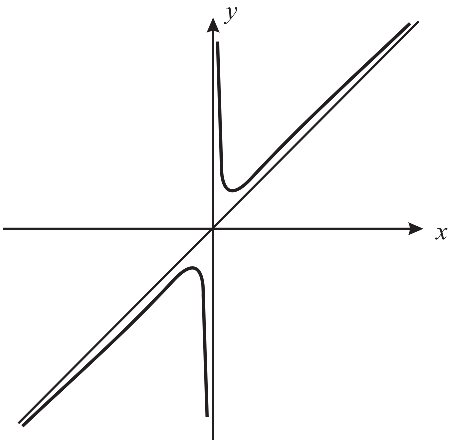


Figura 2.8

10. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$. Observemos que f no ésta definida en $x = 0$ y $x = 1$ y que cuando $x \to 0$ o $x \to 1$ $\quad |f(x)| \to \infty$. Por lo tanto, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. También se tiene que
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
lo cual quiere decir que $y = 0$ es una asíntota horizontal. Además, como el lector puede verificar
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \; ; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty \; ; \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$
Por lo tanto la gráfica de f debe ser algo parecido a:

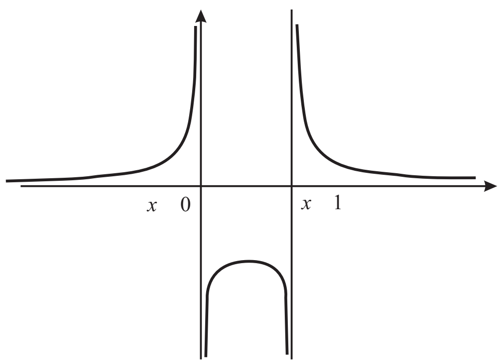


Figura 2.9

Ejercicios 3.

1. Defina los siguientes conceptos

   a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$,

   b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$,

   c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$,

   d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

y dé equivalencias similares a las dadas en la Observación (3) de la página 101.

2. Por medio de la definición demuestre que:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} 3x = \infty$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} (x+5) = \infty$, c) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x+4) = \infty$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} (3x - 14000) = \infty$, e) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$,

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$, g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{x}\right) = 2$.

3. Halle el límite indicado empleando la definición

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2}{3x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{3x-2}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{90x^2+1}{x^2+99}$;

ch) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^2-4)}{(x-2)(x+1)}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^9+6x+3}{x^{10}-x-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x^4+x^2+1)}{3x^2+4}$.

4. Para las funciones f y g en los ejercicios (a) y (b) determine las funciones $f+g$, fg y f/g. Calcule los límites indicados de estas tres funciones.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$ cuando $x \to \infty$

(b) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$; $g(x) = \dfrac{x-1}{3x}$ cuando $x \to \infty$

$\left(\text{sugerencia: } \dfrac{x+1}{2x+3} = \dfrac{1+1/x}{2+3/x} \text{ para } x \neq 0 \text{ y } \dfrac{x-1}{3x} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3x}\right)$

5. En los siguientes ejercicios usar asíntotas para esbozar las gráficas de las funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$; c) $\dfrac{1}{(x-1)^2} = f(x)$

ch) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$; d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x}$; e) $f(x) = \dfrac{1}{x^3-x}$

6. Sean $f(x) = x$, $g(x) = -x$ y $h(x) = x^2$, ¿cuáles son los valores de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f+h)(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f+g)(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}(g+h)(x)$? ¿Es aplicable el Teorema 2.2.1 en estos casos? (sugerencia: $-x + x^2 = x(x-1)$).

7. Probar que:
$$\lim_{x\to\infty} ax^n = \begin{cases} \infty, & \text{si } a > 0 \\ -\infty, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$
(ver ejercicio 15 página 76)

8. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Probar que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ y que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ pero que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe.

9. Probar que:

   (a) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ o $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$,

   (b) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, no necesariamente
$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$
   (pruebe con la función $f(x) = x$ en $x_0 = 0$),

   (c) Calcule $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-2}{x^2-3x+2}$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2}{x^2-3x+2}$

   ¿Existe $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2}{x^2-3x+2}$ o bien es ∞ o $-\infty$?

10. Sean $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$. Probar que

    (a) $\lim\limits_{x\to x_0} (f-g)(x) = -\infty$, (b) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \infty$ (cuando $L > 0$),

    (c) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = 0$, (ch) $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = -\infty$ (cuando $L < 0$).

11. Supóngase que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, que $f(x) > 0$ para $x \neq x_0$ y que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \neq 0$. Probar que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \infty & \text{si } b > 0, \\ -\infty & \text{si } b < 0. \end{cases}$$

12. En los siguientes ejercicios encontrar las funciones f y g que cumplen con las condiciones dadas.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} (fg)(x) = 2$,
(b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} (fg)(x) = \infty$,
(c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} (f-g)(x) = 3$,
(d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} (fg)(x) = \infty$,
(e) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \infty$,
(f) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = \infty$.
(g) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = 5$,
(h) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = 0$.

¿Es posible que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = L < 0$? Explique su respuesta.

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \infty$,
(j) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = -\infty$,
(k) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = L \in \mathbb{R}$.

13. Probar las siguientes versiones del Teorema 2.2.3:

(a) Si $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = a$ y $g(t) \neq a$ para t suficientemente grande y

$$\lim_{x\to a} f(x) = B \text{ con } x = g(t), \text{ entonces } \lim_{t\to\infty} (f\circ g)(t) = B.$$

(b) Si $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ con $x = g(t)$, entonces

$$\lim_{t\to t_0}(f\circ g)(t)=A.$$

(c) Si $\lim_{t\to\infty} g(t)=\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$ con $x=g(t)$, entonces

$$\lim_{t\to\infty}(f\circ g)(t)=A.$$

(d) Si $\lim_{t\to-\infty} g(t)=\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$ con $x=g(t)$, entonces

$$\lim_{t\to-\infty}(f\circ g)(t)=A.$$

(e) Si $\lim_{t\to-\infty} g(t)=-\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$ con $x=g(t)$, entonces

$$\lim_{t\to-\infty}(f\circ g)(t)=A,$$

(f) Si $\lim_{t\to-\infty} g(t)=\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ con $x=g(t)$, entonces

$$\lim_{t\to-\infty}(f\circ g)(t)=\infty.$$

(g) Si $\lim_{t\to\infty} g(t)=-\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ con $x=g(t)$, entonces

$$\lim_{t\to\infty}(f\circ g)(t)=\infty.$$

(h) Si $\lim_{t\to\infty} g(t)=-\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ con $x=g(t)$, entonces

$$\lim_{t\to\infty}(f\circ g)(t)=-\infty.$$

(i) Si $\lim_{t\to\infty} g(t)=-\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$ con $x=g(t)$, entonces

$$\lim_{t\to\infty}(f\circ g)(t)=A.$$

§4

2.4 Continuidad

Definición 2.4.1 Una función f es continua en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{2.3}$$

Esta definición encierra suposiciones que se sobrentienden al escribir la igualdad (2.3). Estas son:

1. que f está definida en un intervalo abierto que contiene a x_0,
2. que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe.

Además, el hecho de que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ no es un hecho cotidiano. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1, \\ 1000 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

es una función que está definida en el intervalo más grande que puede contener a $x_0 = 1$, esto es, en toda la recta real. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe y f está definida en 1; sin embargo, la igualdad (2.3) no se tiene pues $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ y $f(1) = 1000$.

Este ejemplo muestra una de las formas, la menos patológica, en la que una función puede no ser continua. Otras maneras en las que f no es continua son:

1. f no está definida en x_0, en cuyo caso la ecuación (2.3) no tiene sentido; por ejemplo, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no está definida en $x_0 = 0$ y por lo tanto es discontinua allí.

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ no existe. Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

f está definida en $\mathbb{R}$ y no es continua en $x_0 = 0$, sencillamente porque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

Un ejemplo que muestra la misma situación, lo hallamos en la función

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Aquí $g(0) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1$, pero $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -1$ que es distinto de $g(0)$. Entonces g no es continua en 0 porque, como se acaba de demostrar, $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ no existe. Sin embargo, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$ y esta situación suele expresarse diciendo que g es continua por la derecha en 0. En forma mas general, se dice que:

Una función g es *continua por la derecha* en un punto x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = g(x_0)$ y es *continua por la izquierda* en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_o^-} g(x) = g(x_0)$.

No es difícil convencerse, en vista de una caracterización de límites vista en la sección anterior, que:

f es continua en $x_0 \Leftrightarrow f$ es continua por la derecha en x_0 y f es continua por la izquierda en x_0.

También, de acuerdo con la definición de límite, se obtiene:

f es continua en $x_0 \Leftrightarrow$ Para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda x, si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Pero, en este caso, en el que el límite es $f(x_0)$, la frase

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

puede cambiarse por la condición

$$|x - x_0| < \delta$$

puesto que si $x = x_0$, entonces se cumple ciertamente que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Así que:

f es continua en $x_0 \Leftrightarrow$ Para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda x, si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si una función no es continua en un punto x_0, se dice que es discontinua en x_0, pero estas discontinuidades pueden ser de diferente índole. Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ no es continua en $x_0 = 2$ ya que ni siquiera está definida allí y lo mismo vale para la función $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Ahora bien, f puede extenderse a todos los reales y hacerla continua. Para ello basta definir la función

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{si } x \neq 2, \\ 4, & \text{si } x = 2, \end{cases}$$

entonces F está definida en todos los reales, $F(x) = f(x)$ si $x \neq 2$ y F es continua en 2 porque

$$\lim_{x \to 2} F(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4 = F(2).$$

Esta clase de extensión no es posible para $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ ya que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2}$ no existe y por más que "definamos g en 2", g no podrá ser continua ni llevándola a bailar a Chalma.

Analicemos esta otra función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional}, \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional}, \end{cases}$$

si $x_0 = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = f(x)$ (ver ejemplo 7 de la Sección 2.1 de este capítulo) y entonces f es continua en 0. Además $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ con $x_0 \neq 0$ no existe, así que esta es una función que sólo es continua en un punto.

Los teoremas sobre límites nos proporcionan el siguiente teorema, que facilita enormemente el ver que una función es continua en un punto.

Teorema 2.4.1 *Supongamos que f y g son continuas en x_0. Entonces:*
(1) $f+g$ es continua en x_0,
(2) fg es continua en x_0,
(3) Si $g(x_0)\neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ es continua en x_0.

Con este teorema es fácil demostrar que cualquier función del tipo

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n}$$

es continua en todo punto de su dominio máximo.

Además vamos a tener lo siguiente:

Teorema 2.4.2 *Si $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$ y f es continua en x_0, entonces*

$$\lim_{t\to t_0} f(g(t))=f(x_0)=f(\lim_{t\to t_0} g(t)).$$

Demostración: Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a t_0 tal que $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_n\neq t_0$ entonces, como $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(t_n)=x_0$ y como f es continua en x_0 se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(g(t_n))=f(x_0)$. Por lo tanto $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t))=f(x_0)$. ■

Como un caso particular de este teorema, seguramente el lector podrá demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.4.3 *Si g es continua en t_0 y f es continua en $x_0=g(t_0)$, entonces $f\circ g$ es continua en t_0, es decir, $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t))=f(g(t_0))$.*

Los teoremas hasta ahora vistos en esta sección se refieren todos a continuidad en un punto, pero será más interesante dirigir nuestra atención a funciones que son continuas en todos los puntos de algún intervalo.

Definición 2.4.2 (1) La función f es **continua en un intervalo abierto** $(a,\ b)$ si y sólo si f es continua en x, para toda x en $(a,\ b)$.

(2) La función f es **continua en un intervalo cerrado** $[a,\ b]$ si y sólo si f es continua en $(a,\ b)$ y además f es continua por la derecha en a $\left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)\right)$ y continua por la izquierda en b $\left(\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)\right)$.

El primer resultado de funciones continuas en intervalos cerrados es nada menos que el famosísimo TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO, que a la línea dice:

Teorema 2.4.4 *Si f es continua en $[a,\ b]$ y si*

$$f(a) < c < f(b) \qquad o \qquad f(b) < c < f(a),$$

entonces existe $x_0 \in (a,\ b)$ tal que $f(x_0) = c$.

Demostración: Supongamos que $f(a) < c < f(b)$ y sea

$$A = \{x \in [a,\ b] / f(x) < c\}.$$

Como $a \in A$, $A \neq \varnothing$ y como $A \subseteq [a,\ b]$, A está acotado superiormente, entonces existe $x_0 = \sup A$. Mostraremos primero que $x_0 \in [a,\ b]$:
Primero: $a \in A$ implica que $a \leq x_0$.
Por otro lado, si $x_0 > b$, entonces existe $x \in A$ tal que $x_0 \geq x > b$. Por lo tanto $x \in [a,\ b]$ y $x > b$, ¡vil cosa!, así que, como esto no es posible, $x_0 \leq b$.
Por lo tanto $x_0 \in [a,\ b]$. Probaremos ahora, por contradicción, que $f(x_0) = c$. Supongamos que $f(x_0) \neq c$; entonces $f(x_0) > c$ ó $f(x_0) < c$.

i) Si $f(x_0) > c$, sea $\varepsilon = f(x_0) - c > 0$, entonces como f es continua en $[a,\ b]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in [a,\ b] : \text{si } |x - x_0| < \delta \text{ implica que } |f(x) - f(x_0)| < f(x_0) - c,$$

lo cual implica que $f(x_0) - (f(x_0) - c) < f(x) < f(x_0) + f(x_0) - c.$

Luego, $f(x) > c$.
Ahora, como $x_0 = \sup A$, $x_0 - \delta$ no es cota superior de A y por lo tanto existe $x_1 \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ y $x_1 \in A$. Por lo anterior $f(x_1) > c$. Pero como $x_1 \in A$, $f(x_1) < c$. Esto es una contradicción. Por lo tanto, no puede pasar que $f(x_0) > c$.

ii) Si $f(x_0) < c$, sea $\varepsilon = c - f(x_0) > 0$, entonces, dado que f es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in [a,\ b],\ \text{si } |x - x_0| < \delta \text{ entonces } |f(x) - f(x_0)| < |f(x_0) - c|.$$

Luego,

$$f(x_0) - |c - f(x_0)| < f(x) < f(x_0) + |f(x_0) - c|).$$

Así, $f(x) < f(x_0) + c - f(x_0) = c$. Por lo tanto, existe $x_2 \in (x_0,\ x_0 + \delta) \cap [a,\ b]$ y por tal motivo $f(x_2) < c$. Por consiguiente, $x_2 \in A$. Pero entonces $x_0 \geq x_2$ y esto es otra contradicción, es decir, no puede ocurrir que $f(x_0) < c$.

Por lo tanto $f(x_0) = c$. Además $x_0 \neq a$ y $x_0 \neq b$ pues $f(a) \neq c \neq f(b)$; es decir $x_0 \in (a,\ b)$ y $f(x_0) = c$. ■

Geométricamente, el teorema del valor intermedio dice que la gráfica de una función continua que va de un lado a otro de una línea horizontal $y = c$ debe cortar a dicha recta en algún punto:

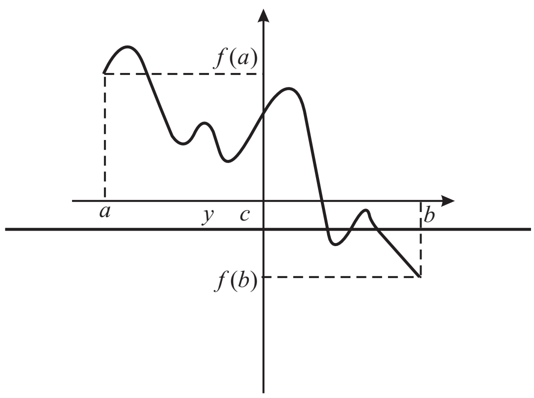


Figura 2.10

Las consecuencias de este teorema son muchas. Entre ellas tenemos:

Corolario 2.4.5 *Todo número positivo tiene raíz cuadrada. Es decir, si* $\alpha > 0$*, existe* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $x^2 = \alpha$.

Demostración: Sea $f(x) = x^2$. Afirmamos que existe $b > 0$ en R, tal que $f(b) > \alpha$. En efecto:

1. Si $\alpha > 1$, sea $b = \alpha$. Entonces $f(b) = f(\alpha) = \alpha^2 > \alpha$,

2. Si $\alpha < 1$, sea $b = 1$. Entonces $f(b) = f(1) = 1 > \alpha$,

3. Si $\alpha = 1$, sea $b = 2$. Entonces $f(b) = f(2) = 4 > \alpha$.

Entonces, se tiene que:

$$f(0) < \alpha < f(b)$$

y como f es continua en $[0,\ b]$, por el teorema anterior existe $x_0 \in (0,\ b)$ tal que $f(x_0) = x_0^2 = \alpha$. ■

Corolario 2.4.6 *Supongamos que* f *es continua y estrictamente creciente (decreciente) en un intervalo* $[a,\ b]$*. Entonces para cada* c *tal que* $f(a) < c < f(b)$ $(f(a) > c > f(b))$*, existe un único* $x_0 \in (a,\ b)$ *tal que* $f(x_0) = c$.

La demostración se deja al lector, si es que lo hay.

Corolario 2.4.7 *Si* f *es continua y estrictamente creciente en* $[a,\ b]$*, entonces* $f([a,\ b]) = [f(a),\ f(b)]$.

La demostración es un ejercicio para el lector.

Corolario 2.4.8 *Si* f *es continua y estrictamente creciente en* $[a,\ b]$*, entonces existe la inversa* $f^{-1} : [f(a),\ f(b)] \to [a,\ b]$ *y* f^{-1} *es continua y estrictamente creciente en* $[f(a),\ f(b)]$.

Demostración: Por el Corolario (2.4.7), $f : [a,\ b] \to [f(a),\ f(b)]$ es suprayectiva y como f es estrictamente creciente, f es inyectiva. Por consiguiente, existe $f^{-1} : [f(a),\ f(b)] \to [a,\ b]$, inversa de f. También f^{-1} es estrictamente creciente, pues si $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$ en $[f(a),\ f(b)]$ tal que $y_1 < y_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$ y como f es estrictamente creciente se concluye que $x_1 < x_2$ y $x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2)$. Por tanto $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Para probar que f^{-1} es continua en $[f(a),\ f(b)]$, sean $A = f(a)$ y $B = f(b)$. Veremos primero que f^{-1} es continua en $(A,\ B)$. Sean $y_0 \in (A,\ B)$ y $x_0 \in (a,\ b)$ tales que $f(x_0) = y_0$. Si $\varepsilon > 0$ es tal que $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$, sean $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ y $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Como f es estrictamente creciente, $y_1 < y_0 < y_2$ y por el teorema del valor intermedio, si $y \in (y_1,\ y_2)$, existe $x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ tal que $f(x) = y$. Sea $\delta_1 = y_2 - y_0$ y $\delta_2 = y_0 - y_1$. Si $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene que:

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \text{ implica } y_1 < y < y_2$$

y por eso $f^{-1}(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Por lo tanto $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$ si $|y - y_0| < \delta$.

Demostremos ahora que f es continua en A, es decir, que $\lim\limits_{y \to A^+} f^{-1}(y) = a$. Para esto, sea $\varepsilon > 0$ y $y_1 = f(a + \varepsilon)$, si $\delta_1 = y_1 - A$, se tiene que si $A \leq y < A + \delta$, entonces $a \leq f^{-1}(y) < a + \varepsilon$, lo que demuestra nuestra afirmación. De igual forma se demuestra la continuidad en B. Se deja como ejercicio para el lector la demostración de que f^{-1} es única. ■

Puede probarse también como corolario de este teorema, que si n es impar, cualquier ecuación de la forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + \ldots a_n x^n = 0$$

tiene una solución.

Sólo daremos aquí un ejemplo. Veremos que la ecuación $x^3 + 2x - 8 = 0$ tiene una solución real. Para esto, definimos $f(x) = x^3 + 2x - 8$; entonces $f(0) = -8$ y $f(2) = 8 + 4 - 8 = 4$. Por lo tanto, $f(0) < 0 < f(2)$ y como f es continua en $[0, 2]$, existe $x_0 \in (0, 2)$ tal que $f(x_0) = 0$, por consiguiente x_0 es una solución de la ecuación dada.

Daremos un ejemplo más: Supongamos que f es continua en $[0, 3]$ y que f no se hace cero en dicho intervalo.

$$\text{Si } f(0) = 1, \text{ entonces para toda } x \in [0,3], f(x) > 0$$

ya que si para algún $x_1 \in (0,3]$ se tuviera que $f(x_1) < 0$, entonces

$$f(x_1) < 0 < f(0)$$

y esto implicaría que existe $x_0 \in (0, x_1)$ tal que $f(x_0) = 0$.

Hemos visto que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y creciente o decreciente, el corolario 2.4.7 del teorema del valor intermedio nos asegura que f es acotada, ya que $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Sin embargo, existen funciones definidas y continuas en un intervalo abierto que no son acotadas como en el caso de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Aquí, f es continua en $[0,1] - \{0\}$ y f no está acotada superiormente.

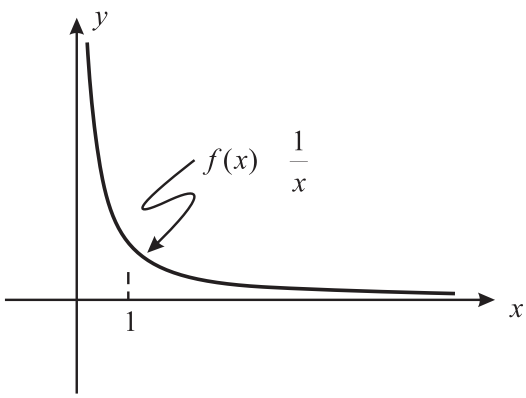


Figura 2.11

También esta función es continua en $(0,1)$ pero no es acotada en este intervalo.

El siguiente teorema establece condiciones suficientes para que una función sea acotada:

Teorema 2.4.9 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces f es acotada en $[a,b]$.*

Demostración: Como f es continua en b, existe $\varepsilon > 0$ tal que f es acotada en el intervalo $(b-\varepsilon, b]$. Si denotamos

$$X = \{t \in [a,b] : f \text{ es acotada en } [t,b]\},$$

claramente X es acotado inferiormente. Pongamos $x_0 = \inf X$; nuestro interés es mostrar que $x_0 = a$. Si ocurriera que $a < x_0$, entonces f sería acotada en una vecindad $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ y podemos hallar, por consiguiente, $t_0 \in (x_0 - \delta_1, x_0)$ tal que f es acotada en $[t_0, x_0 + \delta_1)$ y esto implica que f es acotada en $[t_0, b]$ con lo que $t_0 \in X$ y $t_0 < x_0$. Esta contradicción demuestra que $x_0 = a$. ■

Para hablar del siguiente teorema, damos la siguiente.

Definición 2.4.3 Sea $f : A \to R$ y $x_0 \in A$. Entonces

(1) La función f **alcanza su máximo** en x_0, en A, si para toda $x \in A$ se tiene que $f(x_0) \geq f(x)$.

(2) La función f **alcanza su mínimo** en x_0, en A, si para toda $x \in A$ se tiene que $f(x_0) \leq f(x)$.

Si f alcanza su máximo en x_0, en A, $f(x_0)$ es llamado el **valor máximo** de f sobre A (se dice también que $f(x_0)$ es el máximo de f en A). Si f alcanza su mínimo en x_0, en A, $f(x_0)$ es llamado el **mínimo** (o valor mínimo) de f sobre A.

Consideremos ahora la función $f : (0,2) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$. Nos preguntamos acerca de la existencia de un elemento máximo para el conjunto

$$A = \{y \in \mathbb{R} : \ y = f(x), \ x \in (0,2)\},$$

y lo que afirmamos es que este conjunto no tiene elemento máximo (tampoco mínimo). Esperamos que el lector lo verifique. Fijémonos ahora en la misma función, pero ahora definida en $[0, 2]$; en este caso f sí alcanza su máximo en $[0, 2] : f(2)$ es el máximo.

La diferencia entre estos dos casos es que en el primero la función está definida en un intervalo abierto, en tanto que en el segundo caso se define f en un intervalo cerrado. Lo que ocurre en el segundo caso es una situación general y se establece en el siguiente teorema.

Teorema 2.4.10 *Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existen x_0, $x_1 \in [a, b]$ tales que para cualquier $x \in [a, b]$,*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1).$$

Demostración: Probaremos que existe x_1. Como f es continua, f es acotada superiormente y por el axioma del supremo existe $M_0 = \sup\{f(x)/x \in [a, b]\}$. Supongamos que para cualquier $x \in [a, b]$ $f(x) < M_0$ (recordemos que si el máximo de un conjunto existe, coincide con el supremo (ver el libro *Matemáticas Elementales*); entonces $0 < M_0 - f(x_0)$ y por esta razón

$$h(x) = \frac{1}{M_0 - f(x)}$$

es también una función continua en $[a, b]$, por consiguiente también es acotada allí; sea L una cota superior de h que puede elegirse mayor que cero. Por tanto $\dfrac{1}{M_0 - f(x)} < L$ lo que implica que $f(x) < M_0 - \dfrac{1}{L} < M_0$, como esta desigualdad es válida para cualquier $x \in [a, b]$, lo que significa es que $M_0 - \dfrac{1}{L}$ es una cota superior de f; esto contradice que M_0 sea el supremo. Así, para algún $x_1 \in [a, b]$ debe satisfacerse que $f(x) < f(x_1)$ (se suplica al lector que demuestre la existencia de x_0). ■

Puede haber, sin embargo, funciones acotadas que no alcancen su máximo o su mínimo en su intervalo de definición. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 1, \\ 0, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

está acotada superiormente en $[0, 1]$, pero esta función no alcanza su máximo en dicho intervalo, como se ve en la Figura 2.12, porque f no es continua en 1.

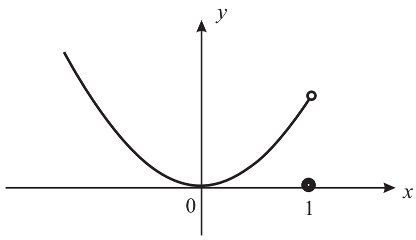


Figura 2.12

Ejercicios 4.

1. Sea f continua en x_0 y definida en un intervalo abierto que contenga a x_0. Supongamos que $f(x_0) > 0$. Demuestre que hay un intervalo abierto I que contiene a x_0, en el cual f es positiva (es decir, para toda $x \in I,\ f(x) > 0$).

2. Decida si cada una de las funciones cuyas gráficas aparecen en las siguientes figuras, es continua. Explique sus respuestas:

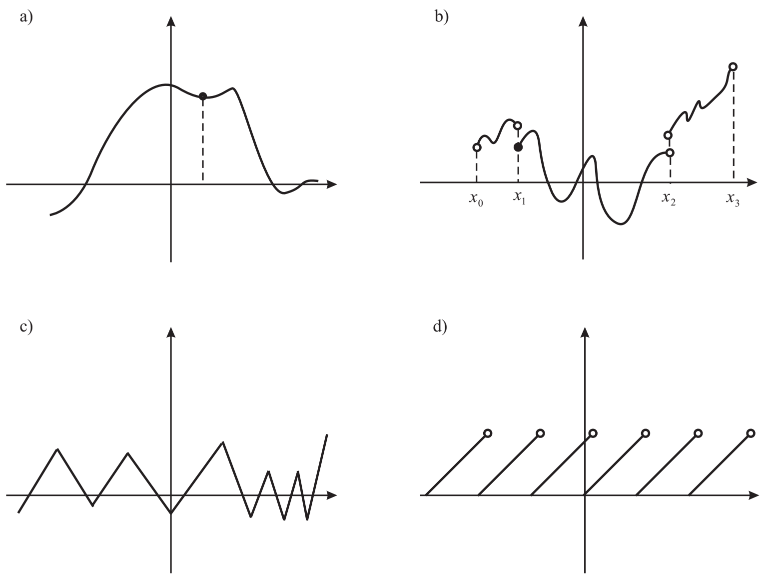


Figura 2.13

3. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{si } x<1, \\ ?, & \text{si } 1 \le x \le 3, \\ x-6, & \text{si } 3 < x. \end{cases}$$

¿Cómo podemos definir $f(x)$ en el intervalo $[1,3]$ para que f sea continua en $(-\infty,+\infty)$?

4. Sea $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$, ¿hay alguna manera de definir $f(0)$ para que la función resultante sea continua?

5. ¿Dónde es continua la función $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^3-8}$?

6. Sea $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$. Demostrar que f es continua en $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

7. Encuentre una función que sea continua en $\mathbb{R}$ excepto en $x=1$, $x=2$, $x=3$.

8. Explique por qué la función h dada por

$$h(x) = \begin{cases} -x^3+5 & \text{si } x \leq 2, \\ x^2+7 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

es continua en $x=2$, ¿es h continua en $\mathbb{R}$?

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) = x^2$ para toda x racional, ¿cuánto vale $f(x)$ para toda x en los reales?

10. Supóngase que f es continua en un intervalo $[a,b]$ y que $f(x)$ es racional para toda $x \in [a,b]$. Encuentre $f(x)$.

11. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Demostrar que existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = 0$.

12. La función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ nunca toma el valor de cero, pero $f(0) = -1 < 0$ y $f(2) = 1 > 0$. ¿Por qué éste no es un contraejemplo al teorema del valor intermedio?

13. Pruebe que la ecuación $3x^5 + 2x^3 = 10$ tiene por lo menos una raíz real.

14. Sea $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ tal que a_0 y a_n tienen signos opuestos, Probar que existe $x_0 > 0$ tal que $f(x_0) = 0$.

15. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que para toda $x \in [a, b]$, $f(x) \neq 0$. Demostrar que $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$ para toda $x \in [a, b]$.

16. Suponga que f y g son continuas en $\mathbb{R}$. Probar que si: para toda $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq g(x)$ y $f(0) > g(0)$, entonces para toda $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(x) > g(x)$ (Sugerencia: $f - g$ es continua en $\mathbb{R}$).

17. Suponga que f es una función continua en $[0, 1]$ y que $f(x)$ está en $[0, 1]$ para toda $x \in [0, 1]$. Demostrar que $f(x) = x$ para algún número $x \in [0, 1]$.

18. El ejercicio anterior demuestra que f corta a la diagonal del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Demostrar que f también debe cortar la otra diagonal del cuadrado.

19. Demuestre el ejercicio 15, pero ahora para intervalos abiertos.

Capítulo 3

LA DERIVADA

§1

3.1 Todo esto es la derivada

La continuidad de las funciones reales está relacionada con ciertas propiedades geométricas de sus gráficas. Por ejemplo, suele decirse que una función continua es una que no tiene saltos ni agujeros. Una función continua no es como ésta:

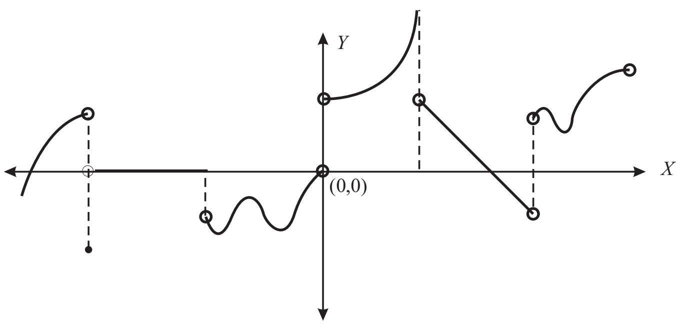


Figura 3.1

Sino, como la de la Figura 3.2.

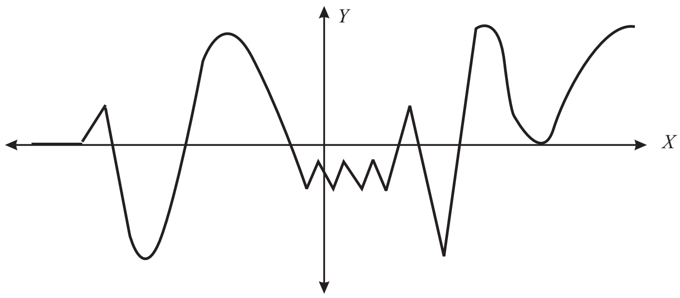


Figura 3.2

La continuidad es una propiedad que implica cierta regularidad de las gráficas de las funciones: la apariencia de "estar conectadas" propiedad que suele asociarse a la idea de curva. Las rectas, círculos, elipses, parábolas, hipérbolas y otras curvas familiares, tienen más propiedades que las implicadas por la mera continuidad. Por ejemplo, tienen una dirección definida en cada punto de ellas o dicho de otro modo, hay una recta tangente en cada punto. En efecto, la idea de dirección está íntimamente ligada con el concepto de tangente: ¿qué pasaría si el sol cesara de atraer hacia sí a la tierra?, pues ésta se saldría por la tangente ... a su órbita elíptica. Si un objeto se moviera en línea recta, va siempre en la misma dirección, pero al moverse en una curva, cambia constantemente de dirección, al pasar por un punto p de la curva, la dirección que lleva en ese instante es la dirección de la tangente a la curva en el punto p, como si el objeto se moviera a lo largo de dicha tangente. Esto es lo que produce que el objeto se "salga por la tangente" cuando desaparece la fuerza que la mantiene en la curva. Es lo que sucede cuando, al patinar un autómovil, desaparece la fuerza de fricción entre las llantas y la carretera, ocasionándose –Dios no lo quiera– un lamentable siniestro, allá en el precipicio. ¿A dónde van las chispas del esmeril afilacuchillos?

Vemos pues que el problema de conocer las tangentes a las curvas es importante para el que se interese en los problemas de movimiento. Fue importante en los siglos XVI y $XVII$ y su estudio, junto con los problemas de movimiento y el de los máximos y mínimos llevó al importante concepto de derivada. Descartes y Fermat dedicaron sus ratos de ocio al estudio de las tangentes y trataron, junto con otros, de lograr un concepto general de tangente que sirviera para todas las curvas y no sólo para unas cuantas, como aquél que nos enseñaron de pequeños: "tangente a una curva es una recta que sólo toca a la curva en un punto". Este concepto sólo sirve para circunferencias o curvas cerradas del mismo jaez, como las elipses (vea la Figura 3.3), pero ya no sirve para una parábola,

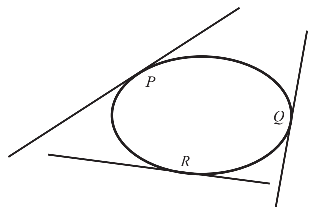


Figura 3.3

porque su eje principal, que no la toca más que en el vértice, sería tangente.

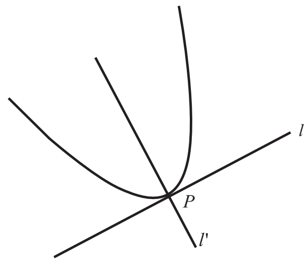


Figura 3.4

Tendríamos que las rectas l y l' son rectas tangentes a la parábola en el punto P y de hecho en cualquier punto de ésta. La parábola tendría más de una recta tangente.

Y la recta l de la Figura 3.5, no tendría derecho a ser tangente a la curva en P_1 (aunque nuestra idea de dirección nos sugiriera que sí lo es) pues corta a la curva en P_2.

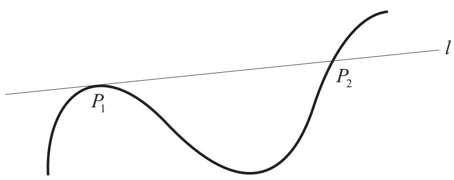


Figura 3.5

¿Y qué decir de curvas como la de la Figura 3.6?, ¿tiene en P muchas tangentes?, ¿no tiene ninguna?

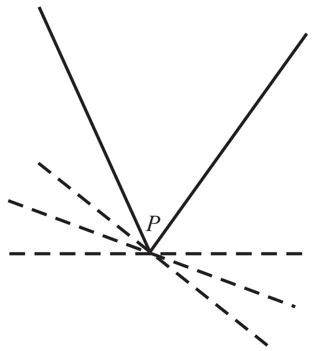


Figura 3.6

Así que esta definición es demasiado restringida, ya que a curvas como la de la Figura 3.5, no le permite tener tangente en el punto P_1 y al mismo tiempo demasiado amplia ya que a curvas como la de la Figura 3.6 acepta más de una tangente.

También Euclides –se dice– mucho antes de Fermat, se interesó por las tangentes. Describió una ley experimental señalando que si un rayo de luz incide en un espejo plano, formando un ángulo de incidencia α, se refleja formando un ángulo de reflección igual en magnitud α (Figura 3.7).

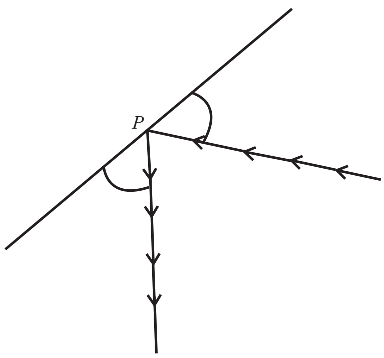


Figura 3.7

Observó también, seguramente, que si un rayo de luz llega a un espejo curvo en un punto P, se refleja como si se reflejara en la tangente del espejo en el punto P (Figura 3.8).

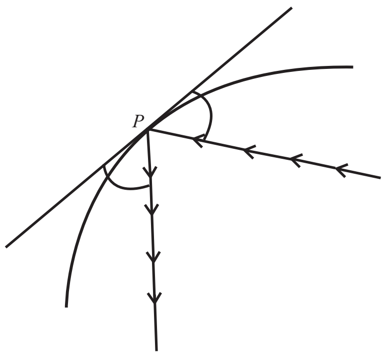


Figura 3.8

En este sentido la tangente a una curva en un punto P es la recta que pasa por P que "más se parece" a la curva, es decir, que si tomamos un segmento de curva alrededor de P y el segmentito correspondiente de la tangente en P, estos dos segmentitos se parecen mucho y cuanto más pequeños son, más se parecen.

Así una definición informal de tangente podría ser la siguiente: "La tangente a una curva en un punto P es la recta que pasa por P que más se parece a la curva".

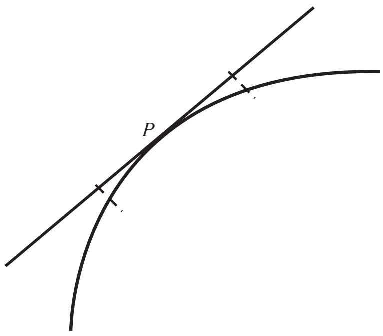


Figura 3.9

En el caso en que la curva es la gráfica de una función f y la tangente l a la curva en el punto $P = (x_0,\ f(x_0))$ tiene una ecuación de la forma $y = f(x_0)+m_l(x-x_0)$ donde m_l es la pendiente de l la cual desconocemos, ahora bien, si x es un punto cerca de x_0 entonces $Q = (x, f(x))$ es un punto de la curva cercana a P (se tendría que suponer que f es continua en x_0 para afirmar que si x está cerca de x_0, $f(x)$ está cerca de $f(x_0)$),

$$Q' = (x, f(x_0) + m_l(x - x_0))$$

es punto de la tangente l, "arriba" de Q, vea la Figura 3.10. Como l "se parece" a la curva en el punto P, Q y Q' casi son el mismo punto, es decir;

$$f(x) \approx f(x_0) + m_l(x - x_0)$$

($\approx$ se lee "aproximadamente igual a") .

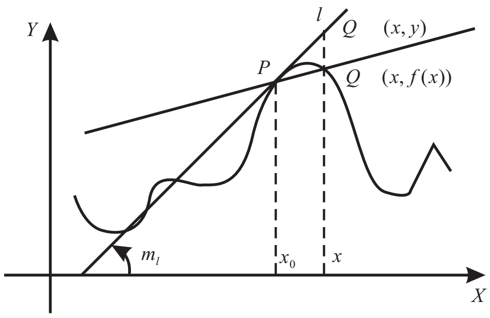


Figura 3.10

De aquí,

$$m_l \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Esto es, la pendiente m_l de la recta l se parece a la pendiente de la recta secante que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y $(x, f(x))$, y se parece más y más a medida que x se acerque más y más a x_0. Se puede decir entonces que:

$$m_l = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Podemos decir también que l es el límite de las secantes que pasan por $(x_0, f(x_0))$ y $(x, f(x))$ a medida que x tiende a x_0, pero como en este curso no hemos hablado de "límite de rectas", preferimos definir la tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ como la recta que tiene por ecuación:

$$y = f(x_0) + m_l(x - x_0),$$

donde
$$m_l = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
si este límite existe.

Por ejemplo, vamos a hallar la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $P = (2, 4)$, vea la Figura 3.11. Sean $f(x) = x^2$ y $Q = (x, f(x))$ cualquier otro punto de la curva. La pendiente de la recta PQ es:
$$m = \frac{f(x) - 4}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2, \quad x \neq 2$$
Así, la pendiente de la tangente es:
$$m_l = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4.$$

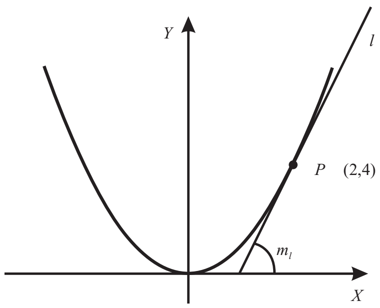


Figura 3.11

y la tangente es la recta: $y = 4 + 4(x - 2)$. He aquí otro ejemplo interesante: supongamos que $f(x) = mx + b$, la gráfica de esta función es la recta $y = mx + b$, que tiene pendiente m. Sea $P = (x_0, mx_0 + b)$ un punto cualquiera de esta recta. Veamos si dicha recta tiene tangente en P. En este caso,
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{m(x - x_0)}{x - x_0} = m$$
Así que la tangente a la gráfica de f en P es la recta que pasa por P con pendiente m o sea, precisamente la recta $y = mx + b$. Entonces la tangente a una recta (no paralela al eje Y) en cualquiera de sus puntos es ella misma.

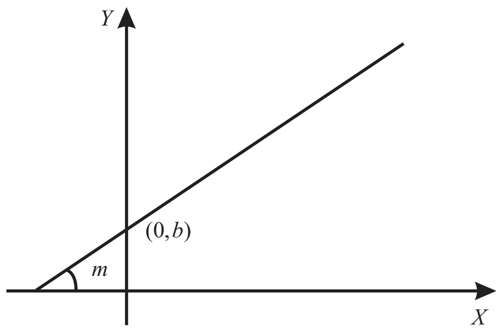


Figura 3.12

No siempre existe $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ aunque "geométricamente" si podamos trazar una tangente a la gráfica de la función. Como en el caso de la función $f(x)=\sqrt[3]{x}$ en $x_0=0$. En este caso:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0}=\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\frac{1}{(\sqrt[3]{x})x}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$$

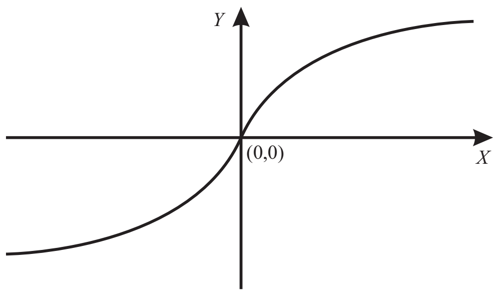


Figura 3.13

En casos como este, suele decirse que f tiene una derivada "infinita" en cero. Geométricamente esto significa que la gráfica de f tiene una "tangente" que es paralela al eje vertical.

Un caso en el que definitivamente no existe tangente es la gráfica en $(0,0)$ es cuando $f(x)=|x|$. La gráfica de esta función, con su pico en 0 es la siguiente –Figura 3.14–.

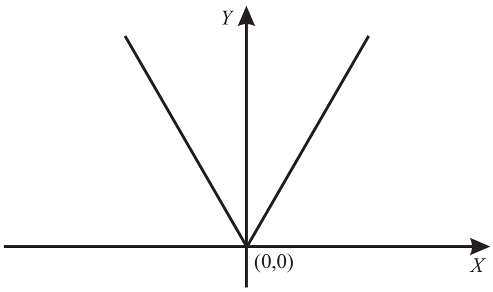


Figura 3.14

En este caso:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to x_0}\frac{|x|}{x}$$

y como sabemos,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1.$$

El hecho de que la gráfica de una función f tenga tangente en un punto, recibe un nombre especial.

Definición 3.1.1 Una función f es **derivable** en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe.

En este caso el límite se designa por $f'(x_0)$, en algunos libros aparece aún la notación de Leibniz $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ y recibe el nombre de derivada de f en x_0.

Ya se ha hecho costumbre en este libro hacer algunos comentarios después de alguna definición. En esta ocasión, haremos los siguientes:

1. La definición de función derivable en un punto x_0, encierra algunas suposiciones tácitas como el hecho de que f está definida en una vecindad de x_0, para que tenga sentido hablar de $f(x_0)$ y de $f(x)$

en esa vecindad. De este modo, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ está definida en una vecindad de x_0, excepto quizá en x_0 y se puede hablar de su límite.

2. Es sencillo percatarse de acuerdo al ejercicio 9 de la página 100 que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe si y sólo si

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe. Así, f **es derivable en** x_0 si y sólo si

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe.

3. Como la gráfica de $f(x)=|x|$ no tiene tangente en $x_0=0$, es decir como no existe $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ cuando $x_0=0$, f no es derivable en 0. Sin embargo,

(a) Si $x_0>0$, entonces como $x\to x_0$ podemos suponer $x>0$ y:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{|x|-|x_0|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=1,$$

es decir, f es derivable en x_0 y $f'(x_0)=1$.

(b) Si $x_0<0$, entonces como $x\to x_0$ podemos suponer $x<0$ y:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{|x|-|x_0|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-x+x_0}{x-x_0}=-1,$$

es decir, f es derivable en x_0 y $f'(x_0)=-1$.

O sea, la función $f(x)=|x|$ es una función que es derivable en cualquier punto de su dominio excepto en $x=0$. Notemos que, aunque

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

no existe, sí existen los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0}$$

diremos entonces que f es derivable por la derecha y derivable por la izquierda en $x_0 = 0$.

En general se dirá que **una función es derivable por la derecha** (respectivamente, por la **izquierda**) en x_0 si existe

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \left(\text{respectivamente } \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right).$$

Ejercicio: Probar que, f es derivable en x_0 si y sólo si las derivadas laterales existen y son iguales.

4. La función $f(x) = |x|$ es un ejemplo de una función continua en $\mathbb{R}$ y en particular en 0, que no es derivable en este punto, así la continuidad no implica la derivabilidad.

$$f \text{ continua en } x_0 \not\Rightarrow f \text{ derivable en } x_0.$$

Por otro lado, como ya hemos comentado, para que la gráfica de una función f tenga una recta tangente en $(x_0, f(x_0))$ cuya pendiente sea el límite de las pendientes de las rectas secantes que pasan por $(x, f(x_0))$ y $(x, f(x))$ cuando $x \to x_0$ se requiere que f sea continua en x_0. Sólo así la tangente se podrá "parecer" a la curva cerca de x_0. En el siguiente teorema se enuncia y se demuestra tal hecho.

Teorema 3.1.1 *Si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.*

Demostración: Si $x \neq x_0$, se tiene;

$$f(x) = f(x) + f(x_0) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) + f(x_0)$$

por consiguiente,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{x\to x_0}(x-x_0) + \lim_{x\to x_0} f(x_0) = f'(x_0)\cdot 0 + f(x_0)$$

lo cual prueba el teorema. ■

Hacemos aquí un paréntesis en el estudio analítico de la derivada, para mencionar otro concepto que se estudia en diversas ramas del conocimiento y que se relacionan íntimamente con la derivada.

Recuerde que en la introducción mencionamos que si una partícula o un objeto se mueve en línea recta a partir de una posición inicial u "origen" O y $s(t)$ es la distancia del objeto a O en el tiempo t, entonces la velocidad media del objeto en el intervalo de tiempo entre t_0 y t_1, es el cociente

$$\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0},$$

es decir, la distancia recorrida entre t_0 y t_1 (diferencia entre las distancias del objeto a O en los tiempos t_0 y t_1) entre el tiempo transcurrido entre t_0 y t_1. Si queremos hablar de la velocidad de la partícula en el instante t_0, tendremos que considerar el límite;

$$\lim_{t\to t_0}\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}$$

pues la velocidad en t_0 se parece mucho a la velocidad media

$$\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}$$

en el intervalo de tiempo entre t_0 y t si t está cerca de t_0 y se parecerá más a medida que t se acerque más y más a t_0.

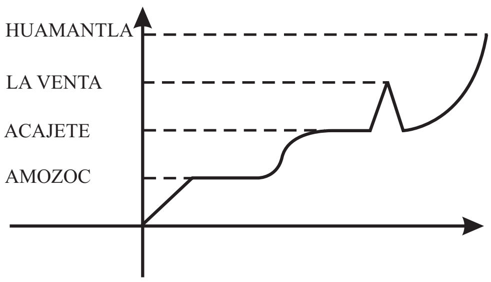


Figura 3.15

Definimos así la velocidad (instantánea) de la partícula en t_0, como $s'(t_0)$. Obsérvese que $s'(t)$ puede muy bien ser positiva o negativa (si la velocidad es negativa, el objeto va de regreso). Si hacemos la gráfica de $s(t)$, esto puede informarnos a *grosso modo* acerca del viaje y la tangente en cada punto acerca de la velocidad instantánea. Por ejemplo, un vehículo sale de Puebla. Destino: Huamantla, Tlaxcala –ver Figura 3.15–, llega a Amozoc sin contratiempos, pero se detiene por gasolina unos cuantos minutos. Al llegar a Acajete se le antoja al conductor una cemita de pata de puerco y se detiene a comérsela allí, pasado lo cual pone pie en el acelerador, lo empuja y ni rastro queda de su paso por Acajete, pero al llegar a la Venta se detiene con brusquedad, da vuelta en U para regresar a Acajete y se logra salvar de una emboscada. Después de un rato emprende de nuevo el camino, aumentando constantemente la velocidad, hasta llegar por fin a su destino.

Como ejemplo, supongamos que una partícula se mueve sobre una recta y tiene posición $y = 3x - 5$ en el tiempo x ¿cuál es la velocidad en el tiempo 8? La tangente a la recta $y = 3x - 5$ en $(8, 19)$ es ella misma y su pendiente (derivada de $f(x) = 3x - 5$) es 3. Por lo tanto la velocidad en el tiempo $x = 8$ es $v = 3$.

La posición de un camión en el tiempo t –en segundos– es $f(t) = 1 + 2t^2$ metros desde un punto de referencia, medida a lo largo de una calle recta. Calculemos su velocidad instantánea en $t_0 = 3$;

$$\lim_{t\to 3}\frac{f(t) - f(3)}{t - 3} = \lim_{t\to 3}\frac{1 + 2t^2 - (1 + 2(3)^2)}{t - 3} = \lim_{t\to 3}\frac{2(t^2 - 9)}{t - 3} = 12.$$

Así, $v(3) = 12$ m/seg.

Aunque el principal ímpetu para el desarrollo del cálculo fue el deseo de estudiar el movimiento, rápidamente "la gente" se dió cuenta de que las mismas ideas podrían ser aplicadas a una gran cantidad de problemas que involucran cambios continuos. El cambio en la posición de un objeto es sólo uno dentro de un sinnúmero de tales cambios continuos; otros son: el crecimiento de organismos, la evaporación de líquidos, la oxidación de los metales, la difusión de gases, la digestión de la comida, la absorción de calor, la ampliación de imágenes fotográficas, la oscilación de cuerdas vibrando, el decaimiento de elementos radiactivos, la inflación de economías, e incluso, la educación de estudiantes, etc, etc, etc. Algunos cambios se llevan a cabo lentamente, como el cambio del paisaje debido a la erosión, mientras que otros, como la fusión nuclear, ocurren velozmente. El cálculo nos ayudará a expresar con presición esta razón en la que los cambios pasan. Veamos un ejemplo:

Un tanque en forma de cono circular se está llenando de agua a razón constante. El tanque mide 30 dm de alto y el radio de la tapa circular 6 dm. El tanque se llena normalmente en una hora ¿qué tan rápido crece la profundidad o altura del agua? –ver Figura 3.16–. Como la altura del agua en el cono cambia de 0 a 30 dm en 60 minutos el promedio de cambio de alturas del agua será de $\frac{1}{2}$ dm/min. Al igual que la velocidad media, esta razón promedio podría ser suficiciente como respuesta, pero para un analisis cuidadoso podría darnos información inadecuada.

Cuando tratamos de ver qué pasa cuando el agua sube en el tanque cónico, nuestra intuición nos dice que al principio el nivel del agua crece rápidamente pero a medida que el tanque se va llenando, la profundidad del agua crece más lentamente.

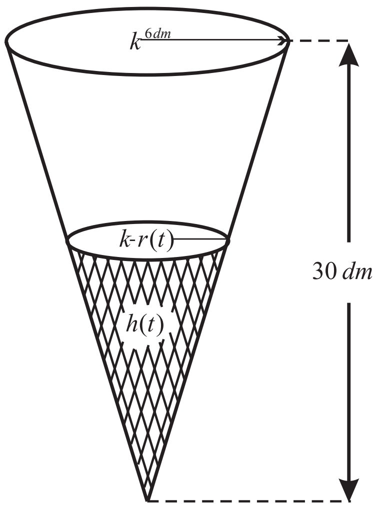


Figura 3.16

Vamos a determinar una fórmula para la profundidad del agua a los t minutos. Recordemos que el volumen del cono circular de altura h y radio de la base igual a r es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Así cuando el agua forma un cono de radio $r(t)$ y altura $h(t)$ después de un tiempo t, su volumen es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(t)h(t) \text{ dm}^3. \tag{3.1}$$

En particular cuando $t = 60$ minutos, el volumen es

$$V = \frac{1}{3}\pi(6^2)(30) \text{ dm}^3 = 360\pi \text{ dm}^3.$$

Este es el volumen total del tanque. Como el agua fluye hacia el interior del tanque en una razón constante y tarda en llenarlo 60 minutos, esta razón constante es

$$\frac{360\pi \text{ dm}^3}{60 \text{ min}} = \frac{6\pi \text{ dm}^3}{\text{min}}.$$

Entonces, después de que el agua ha estado fluyendo durante t minutos, el volumen del agua dentro del tanque es:

$$v(t) = 6\pi t \text{ dm}^3. \tag{3.2}$$

Como (3.1) y (3.2) son fórmulas para el volumen del agua en el tiempo t, podemos igualarlas y obtener:

$$6\pi t = \frac{1}{3}\pi r^2(t)h(t) \text{ dm}^3. \tag{3.3}$$

Por triángulos semejantes –Figura 3.16–, se obtiene:

$$\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{6 \text{ dm}}{30 \text{ dm}} = \frac{1}{5}, \quad \text{es decir } r(t) = \frac{1}{5}h(t).$$

Sustituyendo en (3.3), obtenemos la suguiente igualdad:

$$6\pi t = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h(t)}{5}\right)^2 h(t) \text{ y finalmente, } h(t) = \sqrt[3]{450t}.$$

Esta fórmula expresa la altura h del agua dentro del tanque cónico como función del tiempo. Si calculamos $h(t)$ cada 10 minutos, obtenemos la siguiente tabla:

t (min.)	0	10	20	30	40	50	60
$h(t)$ (dm.)	0	16.5	20.8	23.8	26.2	28.2	30

Cantidad de cambio	16.5 4.3 3 2.4 2 1.8 -diferencia de las alturas-

Durante los primeros 10 minutos el nivel del agua crece más de 16 dm, mientras que durante los últimos 10 minutos, aumenta menos de 2 dm. Vemos entonces que nuestra razón de promedio, $\frac{1}{2}$ dm/min, describe muy pobremente esta situación. Según ella, cada minuto h debe aumentar $\frac{1}{2}$ dm/min, o sea, cada diez minutos el nivel del agua debe aumentar 5 dm más, durante los 10 primeros minutos aumentó más de 3 veces esta cantidad, mientras que durante la última media hora estuvo subiendo el agua menos de la mitad de 5 dm cada 10 minutos.

Es inevitable llegar al concepto de razón instantánea de cambio para expresar cómo va cambiando $h(t)$ en un instante t_0. Si t es un instante cercano a t_0, entonces la altura del agua entre el instante t_0 y el instante t, cambia una cantidad igual a $h(t)-h(t_0)$ y la razón de cambio promedio entre t_0 y t es

$$\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}.$$

El valor límite de este promedio cuando $t \to t_0$ es la razón exacta de cambio en el instante t_0. En este caso es:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0}\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0} &= \lim_{t\to t_0}\frac{\sqrt[3]{450t}-\sqrt[3]{450t_0}}{t-t_0}\\
&= \lim_{t\to t_0}\frac{450t-450t_0}{(t-t_0)\left(\sqrt[3]{(450t)^2}+\sqrt[3]{450t}\sqrt[3]{450t_0}+\sqrt[3]{(450t_0)^2}\right)}\\
&= \lim_{t\to t_0}\frac{450}{\sqrt[3]{(450t)^2}+\sqrt[3]{450t}\sqrt[3]{450t_0}+\sqrt[3]{(450\,t_0)^2}}\\
&= \frac{450}{3\sqrt[3]{(450)^2 t_0^2}} = \frac{\sqrt[3]{450}}{3\sqrt[3]{t_0^2}}.
\end{aligned}$$

Este límite es la derivada de $\sqrt[3]{450t}$ en el punto $t_0 \neq 0$.
En $t_0 = 15$ min., por ejemplo la razón instantánea de cambio será;

$$h'(15) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{2} \approx 0.418 \text{ dm/min.}$$

Otro importante ejemplo de razón instantánea de cambio será: la aceleración, la cual aparece en conexión con el movimiento rectilíneo. Se trata de la razón en la que la velocidad de una partícula cambia con el tiempo. Si $v(t)$ es la velocidad de una partícula en el tiempo t, la razón de cambio de $v(t)$ en el tiempo t_0 será:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

es decir, la velocidad $v'(t_0)$.

Por ejemplo, si una piedra cae $4.9t^2$ metros en t segundos, su velocidad en un instante t_0 es la derivada de la función $s(t) = 4.9t^2$ en t_0. En este caso,

$$s'(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{4.9t^2 - 4.9t_0^2}{t - t_0} = (4.9)\lim \frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0} = 2(4.9)t_0.$$

Esta expresión nos da una fórmula para la velocidad en el instante t_0:

$$v(t_0) = 2(4.9)t_0 \text{ m/seg.}$$

Si consideramos a $v(t) = 9.8t$ como una nueva función, la derivada de esta función en t_0 es la aceleración de la piedra en el instante t_0. En este caso dicha aceleración es:

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = 9.8 \text{ m/seg}^2$$

en cualquier instante.

Observe que $a(t_0)$ viene a ser la derivada de la derivada de $s(t)$ en el punto t_0. Para hablar de la derivada de la derivada debe considerarse a la derivada como una función, a continuación definimos qué se entiende por la función derivada.

Así podemos definir la función derivada bajo las siguientes condiciones.

Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ es derivable en } x\}$, con lo cual $A \subset \mathrm{Dom}(f)$ y se define la función,

$$\begin{aligned} f' : \quad & A \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x_0 \mapsto f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

A esta función se le llama **función derivada** de f.

Ejemplos:

1. Si $f(x) = mx + b$, $\qquad f'(x) = m$,
2. Si $f(x) = x^2$, $\qquad f'(x) = 2x$,
3. Si $f(x) = |x|$, $\qquad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Para comprobar estos resultados, ver los ejemplos ya estudiados en está sección.

Para una función cualquiera f de la que se puede hablar de su función derivada f' puede hablarse de una segunda derivada $(f')'$ como la función derivada (si existe) de f' y cuyo dominio consistirá en todos aquellos puntos x_0 para los que f' es derivable en x_0. La función $(f')'$ suele escribirse simplemente f''. Si $f''(x)$ existe se dice que f es dos veces derivable en x_0 y $f''(x_0)$ se llama la segunda derivada de f en x_0.

Así, si $s(t)$ es la posición de un cuerpo que se mueve en una trayectoria, $s'(t)$ es su velocidad y $s''(t)$ es su aceleración.

Podemos de igual forma definir $f''' = (f'')'$, $f'''' = (f''')'$, etc. Esta notación se hace pronto dificil de manejar, por lo que suele adoptarse la siguiente notación:

$$\begin{aligned} & f^{(1)} = f' \\ & f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

–ésta es en realidad una definición recursiva–

En algunos libros aparece aún la notación de Leibniz para las derivadas. Para hablar de la función f'' ponen $\dfrac{d(df/dx)}{dx}$ y se escribe simplemente $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ y para la n-ésima:

$$\frac{d^nf}{dx^n}.$$

Resumiendo: lo que el alumno debe recordar de esta sección es:

1. Que f es derivable en x_0 si y sólo si
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
existe. Este límite es la derivada de f en x_0 y se denota por $f'(x_0)$.

2. Que el concepto de derivada es extraordinariamente fructífero en sus aplicaciones: Si f es una función, $f'(x_0)$ es la pendiente de la tangente a la gráfica de f en $(x_0\,, f(x_0))$; Si f es la distancia recorrida por un cuerpo, $f'(t)$ es la velocidad en el instante t; si f es la velocidad, $f'(t)$ es la aceleración en t. $f'(x_0)$ representa en general la razón instantánea de cambio de f con respecto a x en el instante x_0.

3. Que si f es derivable en x_0, entonces, es continua en x_0; pero que hay funciones que son continuas en x_0 pero que no son derivables allí (recordar $f(x) = |x|\,, x_0 = 0$).

Hay muchas funciones que el alumno tendrá que derivar, siendo espeluznantemente laborioso recurrir a la definición de derivada (como para las funciones,

$$h(x) = (x^3+3x^2)^{51}, \qquad i(x) = \frac{1}{x-\frac{2}{x+x^2}}).$$

Es imperioso entonces que el estudiante aprenda unos pocos teoremas que le ofrecerán procesos mecánicos para derivar una clase muy amplia de funciones, formadas a partir de las potencias de x, mediante el proceso de suma, multiplicación, división y composición.

Teorema 3.1.2 *Si f y g son derivables en x_0, entonces*

a) $f \pm g$ *es derivable en* x_0 *y* $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,

b) fg *es derivable en* x_0 *y* $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$,

c) $\forall c \in \mathbb{R}$, cf *es derivable en* x_0 *y* $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$,

d) Si $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{1}{g}$ *es derivable en* x_0 *y* $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$,

e) Si $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ *es derivable en* x_0 *y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

f) Regla de la cadena: Si g *es derivable en* x_0 *y* f *es derivable en* $g(x_0)$, *entonces* $f \circ g$ *es derivable en* x_0 *y*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0),$$

g) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua, derivable en* $(a\,, b)$ *y estrictamente creciente –estrictamente decreciente– entonces existe*

$$f^{-1} : [f(a),\, f(b)] \to [a,\, b]$$

que es derivable en $(f(a)\,, f(b))$ *y*

$$\forall x \in (f(a)\, f(b))\ ,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}\ \text{si } f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0.$$

Demostración. a) Probémoslo para la suma

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0}\end{aligned}$$

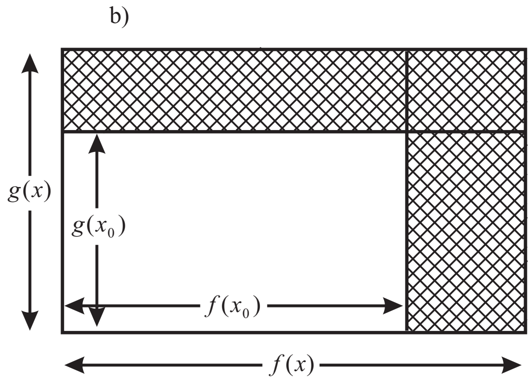


Figura 3.17

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] = f'(x_0) + g'(x_0).$$

b) Si vemos los productos $f(x)g(x)$ y $f(x_0)g(x_0)$ como áreas de rectángulos –ver Figura 3.17–, esto nos sugiere que $f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)$ es igual al área del rectángulo "grande" menos el área del rectángulo "pequeño" y esta diferecia es igual a la suma de las áreas de los rectángulos sombreados, es decir, $(f(x) - f(x_0))\, g(x_0) + (g(x) - g(x_0))\, f(x)$. Por supuesto que el argumento geométrico que usamos sólo vale en ciertos casos, pero quien puede dudar de que:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)\\
&+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\
&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}g(x)\\
&+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\
&=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

Usando el hecho, claro está, de que g es continua en x_0, implicado por la hipótesis, g es derivable en x_0.

c)

$$(cf)'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{cf(x)-cf(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}c\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=cf'(x_0).$$

d)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0}\\
&=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\\
&=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\lim_{x\to x_0}\left(-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\\
&=\frac{1}{g^2(x_0)}(-g'(x_0))=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}
\end{aligned}$$

al igual que en c) se aplica el hecho de que g es continua en x_0 y $g(x_0)\neq 0$.

e) Este inciso se prueba usando b) y d).

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

f) Como g es derivable es x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$. Por lo tanto, la función

$$h_1(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} & \text{si } x \neq x_0, \\ g'(x_0), & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

es continua en x_0 y

$$\forall x \in \mathrm{Dom}(g),\ g(x) - g(x_0) = h_1(x)(x - x_0) \tag{3.4}$$

Como f es derivable en $g(x_0)$,

$$\lim_{y\to g(x_0)} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} = f'(g(x_0))$$

por lo tanto, la función y

$$h_2(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(f(x_0))}{y - g(x_0)} & \text{si } x \neq g(x_0), \\ f'(g(x_0)) & \text{si } x = g(x_0) \end{cases}$$

es continua en $g(x_0)$ y

$$\forall y \in \mathrm{Dom}(f),\ f(y) - f(g(x_0)) = h_2(y)(y - g(x_0)). \tag{3.5}$$

Como g es continua en x_0 y por (3.4) y (3.5) se tiene que si x está cerca de x_0,

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = h_2(g(x))(g(x) - g(x_0)) = h_2(g(x))h_1(x)(x - x_0)$$

Por lo tanto
$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=h_2(g(x))h_1(x)$$
para x cerca de x_0. Por lo tanto
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=h_2(g(x_0))h_1(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0).$$

g) Tenemos que f^{-1} existe por el Corolario 4 del teorema del valor intermedio; ahora probemos la segunda parte.
Sea $x_0\in(f(a),f(b))$ y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera con las siguientes propiedades $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ y $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\neq x_0$, por probar que
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{-1}(x_n)-f^{-1}(x_0)}{x_n-x_0}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$
Como f^{-1} es continua –ver corolario del T.V.I.-, la sucesión $\{f^{-1}(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f^{-1}(x_0)$ y como f^{-1} es biyectiva, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^{-1}(x_n)\neq f^{-1}(x_0)$.
Ya que
$$\lim_{x\to f^{-1}(x_0)}\frac{f(x)-f(f^{-1}(x_0))}{x-f^{-1}(x_0)}=f'(f^{-1}(x_0)).$$
Entonces
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(f^{-1}(x_n))-f(f^{-1}(x_0))}{f^{-1}(x_n)-f^{-1}(x_0)}=f'(f^{-1}(x_0)),$$
o sea
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_0}{f^{-1}(x_n)-f^{-1}(x_0)}=f'(f^{-1}(x_0)),$$
es decir,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{f^{-1}(x_n)-f^{-1}(x_0)}{x-x_0}}=f'(f^{-1}(x_0)).$$
Por lo tanto
$$\frac{1}{(f^{-1})'(x_0)}=f'(f^{-1}(x_0)),$$
de donde
$$(f^{-1})'(x_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Ejemplos:

1. Probar que la función $f(x) = x^2 + 1$ es derivable en cualquier punto de su dominio.
   En efecto, $f(x) = x^2 + 1$ es derivable en cualquier punto de su dominio si,
   $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe,}$$
   $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = 2x_0.$$
   Por lo tanto
   $$f'(x_0) = 2x_0 \ , \quad x_0 \in \mathrm{Dom}(f).$$

2. Probar que la derivada de una función constante es igual a cero.

   En efecto, sea $f(x) = c$, $c =$cte. Entonces,
   $$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

3. Probar que $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in Z$, $x \neq 0$.

   (a) Probaremos primeramente que si $n \in \mathbb{N}$, la función $f(x) = x^n$ es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.
   Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, por el binomio de Newton, tenemos que;
   $$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} =$$
   $$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[x_0^n + nx_0^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2 + \cdots + h^n\right] - x_0^n}{h}$$
   $$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(nx_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right)}{h}$$
   $$= \lim_{h\to 0} n\, x_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h + \ldots + h^{n-1} = nx_0^{n-1}.$$
   Por lo tanto
   $$f'(x_0) = nx_0^{n-1}.$$

(b) Ahora probaremos que si m es un entero negativo, $f(x) = x^m$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y $\forall x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(x_0) = mx_0^{m-1}$. Sea $m \in \mathbb{Z}$ con $m < 0$ y $x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$. Llamemos $n = -m$, entonces $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = nx_0^{n-1}$, por el inciso (a), así que;

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^m - x_0^m}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^{-n} - x_0^{-n}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x_0+h)^n} - \frac{1}{x_0^n}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x_0^n - (x_0+h)^n}{h}\frac{1}{x_0^n(x_0+h)^n} \\
&= \lim_{h\to 0} - \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h}\frac{1}{x_0^n(x_0+h)^n} \\
&= -nx_0^{n-1}\frac{1}{x_0^{2n}} = -nx_0^{n-1-2n} = -nx_0^{-n-1} = mx_0^{m-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f'(x_0) = mx_0^{m-1},\ m \in \mathbb{Z},\ m < 0,\ x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

(c) Por último, si $m = 0$ y $x \neq 0$, entonces, $f(x) = x^m = 1$ y por el ejemplo 2, $\forall x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(x_0) = 0 = 0x_0^{0-1}$.

Más aún, se puede probar que $\forall r \in \mathbb{Q}$ con $x > 0$, $(x^r)' = rx^{r-1}$, $x > 0$. Sea $r \in \mathbb{Q}$, entonces $r = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$f(x) = x^r = x^{m/n} = (x^{1/n})^m,$$

si hacemos $h(x) = x^{1/n}$ y $g(t) = t^m$, entonces

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x^{1/n}) = \left(x^{1/n}\right)^m.$$

Luego, según la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
f'(x) &= g'(h(x))h'(x) = m\left(x^{1/n}\right)^{m-1}\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \\
&= \frac{m}{n}x^{\frac{m-1}{n}}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m-1+1-n}{n}} \\
&= \frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \\
&= rx^{r-1}.
\end{aligned}$$

4. Si f, g y h son funciones derivables en x_0, entonces $f\cdot g\cdot h$ también lo es y:

$$\begin{aligned}
(fgh)'(x_0) &= (fg)'(x_0)h(x_0) + (fg)(x_0)h'(x_0) \\
&= [f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)]\ h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0) \\
&= f'(x_0)g(x_0)h(x_0) + f(x_0)g'(x_0)h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0).
\end{aligned}$$

Se puede probar (por inducción) que:

$$(f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x_0)\cdot\ldots\cdot f_{i-1}(x_0)f_i'(x_0)f_{i+1}(x_0)\cdot\ldots\cdot f_n(x_0).$$

Ejercicios 1.

1. Aplicando las fórmulas correspondientes, calcular las derivadas de las funciones f cuyas expresiones son las siguientes:

   a) $f(x) = (4-x)(3+x)$,
   b) $f(x) = (1-x)(4x-1)$,
   c) $f(x) = (x-3)(x+2)$,
   d) $f(x) = (2x+1)(x^2-1)$,
   e) $f(x) = x^2(x+5)$,
   f) $f(x) = (3x-1)(x+2)x$,
   g) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)}$,
   h) $f(x) = \dfrac{(2-x)}{(4+x)}$,
   i) $f(x) = \dfrac{(x+4)}{(3x-2)}$,
   j) $f(x) = \dfrac{(6x+3)}{x^3}$,
   k) $f(x) = \dfrac{(x^2-1)}{(x^2+1)}$,
   l) $f(x) = \dfrac{3}{x^3}$,
   m) $f(x) = \dfrac{(x^2-4x+4)}{(x^2-4)}$,
   n) $f(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2}$, calcular $f'(t)$, $f''(t)$,
   o) $f(t) = (t+3)(t-1)$, calcular $f'(2)$, $f''(-3)$,
   p) $f(u) = \dfrac{(u+1)}{(u-1)}$, calcular $f'(2)$, $f''(-1)$,
   q) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^3)}$, calcular $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$,
   r) $f(\theta) = \dfrac{(1-\theta)}{(2+\theta)}$, calcular $f'(0)$, $f''(1)$,

s) $f(s) = \dfrac{s^2}{(1-s)}$, calcular $f'(0)$, $f''(2)$, $f''(0)$.

2. (a) Partiendo directamente de la definición, demostrar que si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$, para $a \neq 0$,

   (b) demostrar que la tangente a la gráfica de f en $\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$ no corta a la gráfica de f más que en el punto $\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$,

   (c) demostrar que si $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, entonces $f'(a) = -\dfrac{2}{a^3}$ para $a \neq 0$,

   (d) demostrar que la tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en $\left(a, \dfrac{1}{a^2}\right)$ corta a f en otro punto, que está en el lado opuesto del eje vertical,

   (e) demostrar que si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(a) = 1/2\sqrt{a}$, para $a > 0$,

   (f) hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, en el punto $(4, 2)$.

3. (a) Hallar las pendientes en los puntos $(1, 3)$, $(-1, 1)$ de las tangentes a la gráfica de f, siendo $f(x) = 1 + x + x^2$, x real,

   (b) demostrar que las tangentes a la curva $y = x^3$ en los puntos $(1, 1)$, $(-1, -1)$ son paralelas,

   (c) escribir la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ dadas en (a) y (b) en el punto $(x_1, f(x_1))$ en la notación $\dfrac{df}{dx}$.

4. (a) Hallar f' para $f(x) = [x]$,

   (b) hallar f' para $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

5. (a) Supongamos que $g(x) = f(x + c)$. Demostrar partiendo de la definición que $g'(x) = f'(x+c)$. Trazar un dibujo para ilustrar esto,

(b) demostrar que si $g(x) = f(cx)$, entonces $g'(x) = cf'(cx)$,

(c) se dice que una función f es periódica, de período a, si y sólo si para toda $x \in D_f$, $f(x+a) = f(x)$. Supongamos que f es derivable y periódica con período a. Demostrar que f' es también periódica.

6. Hallar f' y también $f'(x+3)$ en los iguientes casos:

   (a) $f(x) = (x+3)^5$,

   (b) $f(x+3) = x^5$,

   (c) $f(x+3) = (x+5)^7$.

7. Demostrar que f es derivable en 0, donde f es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

8. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$, determinar

   $F(h) = \dfrac{1}{h}[f(x+h) - f(x)]$ cuando $h \neq 0$.
   ¿Existe el límite de $F(h)$ cuando $h \to 0$? ¿Es F derivable en 0? ¿Y en los puntos distintos de 0?

9. Se dice que una función f es **par** si para toda $x \in D_f$, $f(x) = f(-x)$ y que una función f es **impar** si para toda $x \in D_f$, $f(x) = -f(x)$. Demuestre lo siguiente,

   (a) Si f es una función par, entonces $f'(x) = -f'(-x)$,

   (b) Si f es una función impar, entonces $f'(x) = f'(-x)$.

10. (a) Hallar $f''(x)$ si:

    i) $f(x) = x^3$,
    ii) $f(x) = x^5$,
    iii) $f'(x) = x^4$,
    iv) $f(x+3) = x^5$.

(b) Hallar $f''(x)$ si $f(x)$ son las funciones (a) a (m) del ejercicio 1.

11. (a) Si $S_n(x) = x^n$ y $0 \leq k \leq n$, demostrar que:

$$S_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} = k!\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k},$$

(b) Sea $F(u) = f_1(u) \cdot f_2(u) \cdot \ldots \cdot f_n(u)$, siendo $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funciones derivables en x y $F(x) \neq 0$. Probar que:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{f_k(x)}.$$

12. Suponga que f está definida en un intervalo abierto I que contiene a x_0 y supongamos que g es una función de I en $\mathbb{R}$ tal que:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0, \\ m_0 & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Demuestre que $f'(x_0) = m_0 \Leftrightarrow g$ es continua en x_0.

13. Evalúe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$ de dos maneras:

(a) Reconociéndolo como el límite de una derivada,

(b) Racionalizando.

14. (a) Ilustrar mediante un ejemplo (gráfico) que la continuidad de una función no implica necesariamente su derivabilidad.

(b) Dar un ejemplo para probar que, en general, la derivada de un producto o de un cociente no es el producto o el cociente de las derivadas.

15. En la superficie de la tierra la longitud L de un péndulo simple y el período T de oscilación están relacionadas por la ecuación:

$$gT^2 = 4\pi^2 L$$

Calcular la rapidez del crecimiento de L para $T = 1.1$. Tomar $g = 9.8$ y $\pi = 3.1416$ (rapidez de crecimiento = pendiente de L respecto de T).

16. La altura S en pies de una pelota sobre el piso a los t segundos está dada por $S = -16t^2 + 40t + 100$.

    (a) ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = 2$?

    (b) ¿Cuándo es 0 la velocidad instantánea?

17. Una bola rueda hacia abajo en un largo plano inclinado de modo que su distancia S al punto de partida después de t segundos es: $S = 4.5\,t^2 + 2t$ metros. ¿Cuándo será la velocidad instantánea de 30 metros por segundo?

18. Una viajera del espacio se mueve de izquierda a derecha a lo largo de la curva $y = x^2$. Cuando apague sus máquinas, se alejará a lo largo de la línea tangente en el punto donde esté en ese momento. ¿En qué punto debe apagar las máquinas para alcanzar el punto (4,15)?

19. (a) Demostrar que Galileo se equivocó en lo siguiente: Si un cuerpo cae una distancia $s(t)$ en t segundos y s' es proporcional a s, entonces s no puede ser una función de la forma $s(t) = ct^2$.

    (b) Demostrar que los siguientes hechos acerca de s son verdad si $s(t) = \dfrac{a}{2}t^2$.
    i) $s''(t) = a$ (la aceleración es constante).
    ii) $(s'(t))^2 = 2as(t)$.

    (c) Si s se mide en metros, el valor de a es 32. ¿Durante cuántos segundos se debe estar apartado de una araña que cae de un techo de 400 metros? ¿cuál será la velocidad de la araña en el momento de alcanzar a uno que no se haya apartado? ¿cuál será la posición de la araña en el momento en que su velocidad era la mitad de ésta?

§2

3.2 Funciones trigonométricas, exponencial y logaritmo

En esta sección definiremos las funciones trigonométricas de modo geométrico. Las definiciones analíticas, más precisas, no se harán aquí, pues van más allá de los objetivos de este curso.

En el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, sea C la circunferencia unitaria, es decir, la de centro en el origen y radio 1. Tracemos por el punto $(1, 0)$ una recta L paralela al eje de las ordenadas, la que hará las veces de la recta real $\mathbb{R}$.

Definiremos ahora una función $T : \mathbb{R} \to C$ de la siguiente manera: si $r \in \mathbb{R}$ (o sea, si $r \in L$), $T(r) = P$, donde P es el punto de C a donde va a caer r al "enrollarse" la recta L sobre la circunferencia C, siendo la parte positiva de $\mathbb{R}$ enrollada en contra de las manecillas del reloj, mientras que la parte negativa de $\mathbb{R}$ se enrrolla en el sentido de ellas.

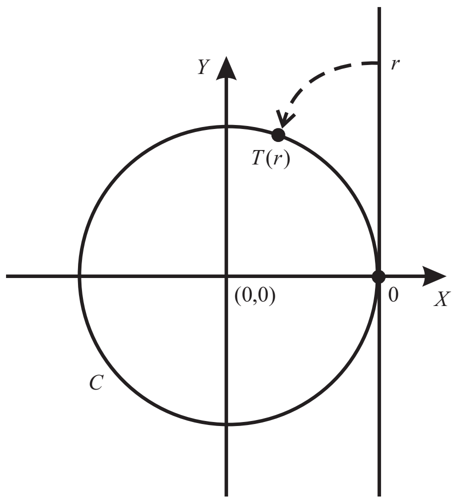


Figura 3.18

Por ejemplo, $T(0) = (1,0)$ y como la longitud de C es 2π, se tiene que $T(2\pi) = (1,0)$, $T\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$, $T\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = (0,1)$, $T(\pi) = (-1,0) = T(-\pi)$, $T\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0,-1) = T\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Observe que T manda a cada real r a un punto (x,y) del plano y que cada una de sus coordenadas x y y depende de r y puede, cada una de ellas, ser considerada como una función de los reales. A estas dos funciones se les darán nombres especiales:

Definición 3.2.1 Definimos la **función seno**:

$$\text{sen}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

y la **función coseno:**

$$\cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

como las funciones tales que si $r \in \mathbb{R}$ y $T(r) = (x,y)$ (donde T es la *función* definida anteriormente), entonces

$$\text{sen } r = y \quad \cos\ r = x.$$

Según esta definición, para cada $r \in \mathbb{R}$,

$$T(r) = (\cos\ r, \text{sen } r),$$

hecho que tendremos en cuenta para demostrar lo siguiente:

Teorema 3.2.1 *Si $r \in \mathbb{R}$, se tiene:*
a) $|\text{ sen } r| \leq 1\,, \quad |\cos\ r| \leq 1,$
b) $\text{sen}^2 r + \cos^2 r = 1,$
c) $\text{sen}(-r) = -\text{ sen } r\,, \quad \cos(-r) = \cos\ r,$
d)

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \begin{array}{l} \text{sen}(r + 2k\pi) = \text{sen } r \\ \cos(r + 2k\pi) = \cos\ r \end{array}$$

e)

$$\text{sen } r = 0 \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } r = n\pi$$

$$\text{sen } r = 1 \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } r = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$\text{sen } r = -1 \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } r = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$$

f)

$$\begin{array}{ll} \cos\ r = 0 \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z} & \text{tal que } r = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \\ \cos\ r = 1 \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z} & \text{tal que } r = 2n\pi \\ \cos\ r = -1 \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z} & \text{tal que } r = \pi + 2n\pi \end{array}$$

g)

$$r \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0 < \text{sen }\ r < 1, \qquad 0 < \cos\ r < 1$$

$$r \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow 0 < \text{sen }\ r < 1, \qquad -1 < \cos\ r < 0$$

$$r \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow -1 < \text{sen }\ r < 0, \quad -1 < \cos\ r < 0$$

$$r \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow -1 < \text{sen }\ r < 0, \quad 0 < \cos\ r < 1$$

h) Si $r \in \mathbb{R}$,

$$\text{sen }\left(\frac{\pi}{2} - r\right) = \cos\ r\ , \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - r\right) = \text{sen }\ r$$

$$\text{sen }\left(\frac{\pi}{2} + r\right) = \cos\ r\ , \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + r\right) = -\text{sen }\ r$$

$$\text{sen }(\pi - r) = \text{sen }\ r\ , \qquad \cos(\pi - r) = -\cos r$$

$$\text{sen }(\pi + r) = -\text{sen }\ r\ , \qquad \cos(\pi + r) = -\cos r$$

$$\text{sen }\left(\frac{3\pi}{2} - r\right) = -\cos\ r\ , \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - r\right) = -\text{sen }\ r$$

$$\text{sen }\left(\frac{3\pi}{2} + r\right) = -\cos\ r\ , \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + r\right) = \text{sen }\ r.$$

Demostración: Sea $r \in \mathbb{R}$. Como $T(r) = (\cos\ r, \text{sen }\ r) \in C$ y

$$C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\},$$

resulta que $\cos^2 r+$ sen $^2 r = 1$ y además que

$$0 \leq \cos^2 r \leq 1 \text{ y } 0 \leq \operatorname{sen}^2 r \leq 1,$$

es decir:

$$|\cos\ r| \leq 1 \text{ y } |\operatorname{sen}\ r| \leq 1.$$

Así pues, se tienen a) y b).
Para demostrar c), notemos que si $T(r) = (x, y)$, entonces $T(-r) = (x, -y)$, pues $T(r)$ y $T(-r)$ son simétricos con respecto al eje X. Por consiguiente

$$(\cos(-r),\ \operatorname{sen}(-r)) = T(-r) = (x, -y) = (\cos\ r, -\operatorname{sen}\ r).$$

Por lo tanto

$$\cos(-r) = \cos\ r \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(-r) = -\operatorname{sen}\ r.$$

d) Es fácil convencerse de que $T(r+2\pi) = T(r)$ y que $T(r-2\pi) = T(r)$, ya que $r + 2\pi$ va a caer en $T(r)$ al enrollarse L en C, pero con una "vuelta" completa más a C, y $r - 2\pi$ también va a dar a $T(r)$ pero con una vuelta completa en el sentido de las manecillas del reloj.
Para terminar de probar d), demostraremos por inducción matemática las siguientes afirmaciones:

i) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{sen}(r + 2n\pi) = \operatorname{sen} r, \ \ \cos(r + 2n\pi) = \cos\ r,$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{sen}(r - 2n\pi) = \operatorname{sen} r, \ \ \cos(r - 2n\pi) = \cos\ r.$

Si $n = 1$, se cumplen pues, como ya observamos,

$$(\cos(r+2\pi), \operatorname{sen}(r+2\pi)) = T(r+2\pi) = t(r) = (\cos\ r,\ \operatorname{sen}\ r),$$

$$(\cos(r-2\pi), \operatorname{sen}(r-2\pi)) = T(r-2\pi) = t(r) = (\cos\ r,\ \operatorname{sen}\ r).$$

Si suponemos que son válidas las afirmaciones i) y ii) para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\operatorname{sen}(r + 2(n+1)\pi) = \operatorname{sen}((r+2\pi) + 2n\pi) = \operatorname{sen}(r+2\pi) = \operatorname{sen}\ r,$$

$$\cos(r + 2(n+1)\pi) = \cos((r+2\pi) + 2n\pi) = \cos(r+2\pi) = \cos\ r,$$

$$\operatorname{sen}(r-2(n+1)\pi) = \operatorname{sen}((r-2\pi)-2n\pi) = \operatorname{sen}(r-2\pi) = \operatorname{sen}\ r,$$
$$\cos(r-2(n+1)\pi) = \cos((r-2\pi)-2n\pi) = \cos(r-2\pi) = \cos r.$$

Por consiguiente también se valen para $n+1$.
Convencerse de la validez de e), f) y g) es también sencillo si usamos la definición de la función T. Y por último, para probar h), supongamos que $T(r) = P_1 = (x, y)$. Entonces, por simetrías con los ejes X o Y, se tendrá: (ver Figura 3.19)

$$\begin{array}{ll} T\left(\frac{\pi}{2}-r\right) = P_2 = (y,x), & T\left(\frac{\pi}{2}+r\right) = P_3 = (-y,x) \\ T(\pi-r) = P_4 = (-x,y), & T(\pi+r) = P_5 = (-x,-y) \\ T\left(\frac{3\pi}{2}-r\right) = P_6 = (-y,-x), & T\left(\frac{3\pi}{2}+r\right) = P_7 = (y,-x) \end{array}$$

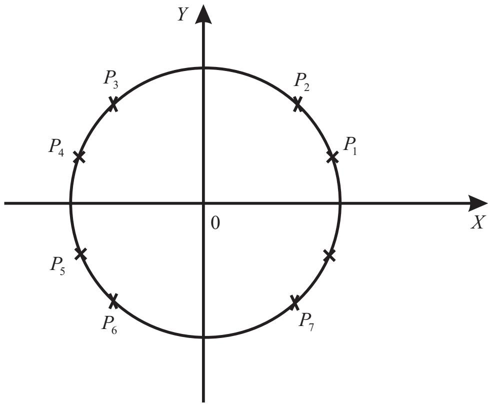


Figura 3.19

Con esto se demuestra h).

La propiedad d) se expresa diciendo que seno y coseno son funciones periódicas de período $2k\pi$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$. ■

En general:

Definición 3.2.2 Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **periódica** si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \neq 0$ y

$$\text{para toda } x \in \mathbb{R}, \text{ se tiene que } f(x+c) = f(x).$$

Un número c que satisface estas condiciones se llama un período de f.

En los ejercicios se mencionarán ejemplos de funciones periódicas que no tienen nada que ver con las funciones seno y coseno. Mientras tanto, podemos definir otras funciones importantes que sí tienen relación con dichas funciones.

Definición 3.2.3 Si $D_1 = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\right\}$ y $D_2 = \mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$. Se definen las funciones:

a) **Tangente**:

$$\tan : D_1 \to \mathbb{R} \text{ tal que } \qquad \tan\ r = \frac{\operatorname{sen} r}{\cos r}.$$

b) **Cotangente**:

$$\cot : D_2 \to \mathbb{R} \text{ tal que } \qquad \cot r = \frac{\cos r}{\operatorname{sen} r}.$$

c) **Secante**:

$$\sec : D_1 \to \mathbb{R} \text{ tal que } \qquad \sec r = \frac{1}{\cos r}.$$

c) **Cosecante**:

$$\csc : D_2 \to \mathbb{R} \text{ tal que } \qquad \csc r = \frac{1}{\operatorname{sen} r}.$$

Estas funciones tienen período $2k\pi$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. Más aún, π es un período para tan y cot, pues:

$$\tan(r + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(r + \pi)}{\cos(r + \pi)} = \frac{-sen\ r}{-\cos\ r} = \tan\ r$$

y de igual forma: $\cot(r + \pi) = \cot\ r$

Podemos añadir a las propiedades de sen y cos vistas en el Teorema 3.2.1, estas otras utilísimas propiedades:

Teorema 3.2.2 *Dados $x,\ y \in \mathbb{R}$, se tiene:*
a) $\cos(x-y) = \cos x\ \cos y +\ \operatorname{sen} x\ \ \operatorname{sen} y$,
b) $\cos(x+y) = \cos x\ \cos y -\ \operatorname{sen} x\ \ \operatorname{sen} y$,
c) $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x\ \cos y +\ \operatorname{sen} y\ \cos x$,
d) $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x\ \cos y -\ \operatorname{sen} y\ \cos x$.

Demostración: Para demostrar a) usaremos el hecho de que la longitud de un segmento en el plano cartesiano no cambia si se rotan los ejes coordenados.
Sean pues $x,\ y \in \mathbb{R}$. Con respecto al sistema de coordenadas X, Y, sean $P_1 = T(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ y $P_2 = T(y) = (\cos y, \operatorname{sen} y)$.

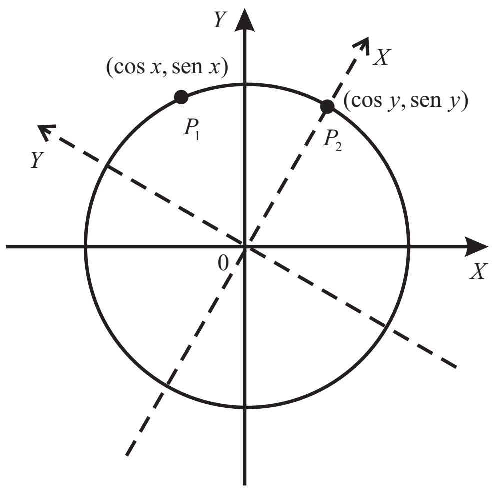


Figura 3.20

Sea d la distancia entre P_1 y P_2 (la longitud del segmento $\overline{P_1P_2}$). Con respecto al sistema $X-Y$,

$$\begin{aligned} d^2 &= (\cos y - \cos x)^2 + (\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x)^2 = \\ &= \cos^2 y - 2\cos y\ \cos\ x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 y - 2\operatorname{sen}\ y \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x \\ &= 2 - 2(\cos x\ \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Si ahora rotamos los eyes $X-Y$ de tal modo que el eje de las abscisas sea la recta OP_2, la longitud d no cambia, pero las coordenadas de P_1 y P_2 con respecto a los nuevos ejes X', Y' son:

$$P_2 = (1,0), \qquad P_1 = (\cos(x-y), \operatorname{sen}(x-y)).$$

Por eso:

$$\begin{aligned} d^2 &= (1-\cos(x-y))^2 + \operatorname{sen}^2(x-y) \\ &= 1 - 2\cos(x-y) + \cos^2(x-y) + \operatorname{sen}^2(x-y) \\ &= 2 - 2\cos(x-y). \end{aligned}$$

Comparando con (3.6), se obtiene $\cos(x-y) = \cos x \, \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

b)

$$\begin{aligned} \cos(x+y) = \cos(x-(-y)) &= \cos x \, \cos(-y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-y) \\ &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

c)

$$\operatorname{sen}(x+y) = \cos(\frac{\pi}{2} - (x+y)) = \cos((\frac{\pi}{2} - x) - y))$$

$$= \cos(\frac{\pi}{2} - x)\cos y + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x \, \cos y + \operatorname{sen} y \, \cos x.$$

d)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x+(-y)) &= \operatorname{sen} x \, \cos(-y) + \operatorname{sen}(-y)\cos x \\ &= \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x. \; \blacksquare \end{aligned}$$

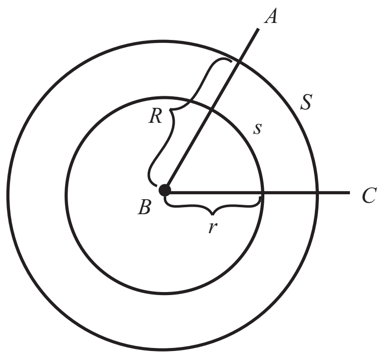
De las identidades a) – d) del Teorema 3.2.2, se deducen las así llamadas, "identidades del ángulo doble" e "identidades del ángulo mitad".

Teorema 3.2.3 *Si* $x \in \mathbb{R}$ *se tiene:*
a) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$,
b) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$,
c) $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$,
d) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$,
e) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$,
f) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$,
g) $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$.

Demostración: Se deja como ejercicio. $\blacksquare$

Antes de continuar estudiando propiedades de las funciones seno y coseno, conviene aclarar qué tiene que ver lo que hemos visto hasta ahora, con la trigonometría usual de triángulos rectángulos, en la que se habla de senos y cosenos de ángulos y no de números reales. Un concepto preciso de ángulo no se dará aquí, pero sea cual sea éste, suelen medirse los ángulos en grados o en radianes.

Vamos a definir primero qué significa que un ángulo esté medido en radianes, para lo cual usaremos el hecho de que si un ángulo $\sphericalangle ABC$ subtiende, respectivamente, arcos de longitudes S y s en circunferencias de radios R y r, respectivamente, con centro común B, entonces $\dfrac{s}{r} = \dfrac{S}{R}$:



$$\frac{s}{r} = \frac{S}{R}$$
(esto se debe a que dos círculos con el mismo centro son figuras semejantes)

Figura 3.21

Así que la relación $\dfrac{s}{r}$ no depende del tamaño del círculo y podemos hacer la siguiente definición.

Definición 3.5. Supongamos que $\sphericalangle\ ABC$ es un ángulo con vértice en B que subtiende un arco de longitud s en una circunferencia con centro en B y radio r. Decimos que la medida del ángulo $\sphericalangle\ ABC$ en radianes es

$$\theta = \frac{s}{r}.$$

Así, si un ángulo subtiende un arco de longitud s en una circunferencia de radio 1, se dice que ese ángulo mide s radianes. En particular, en nuestro círcunferencia unitaria

$$C = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

si A es la intersección de C con el eje X (o sea $A = (1,0)$) y $P = (\cos x,\, \operatorname{sen} x)$ es un punto de C, se puede considerar a x como la medida del ángulo $\sphericalangle AOP$ en radianes y se habla del seno del ángulo $\sphericalangle$AOP o del coseno del ángulo $\sphericalangle AOP$, en vez de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, o bien, se habla del seno y del coseno del "ángulo" x.

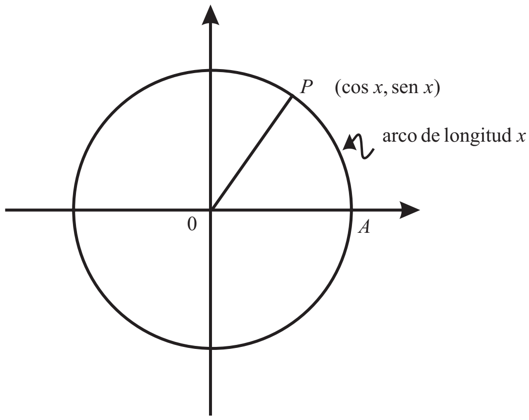


Figura 3.22

Ejemplos :

1. ¿Que ángulo, desde el centro de un círculo de 4 m de radio, subtiende un arco de 10 m?

   Aquí $s = 10,\ r = 4$, así que el ángulo mide

   $$\theta = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \text{ radianes.}$$

2. El ángulo $\dfrac{\pi}{3}$ es el que corresponde a un triángulo equilátero. Situemos el triángulo en el círculo unidad, como se muestra en la Figura 3.23, e inspeccionemos ésta.

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \text{ Por consiguiente } \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{3} = 1$$

$$\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

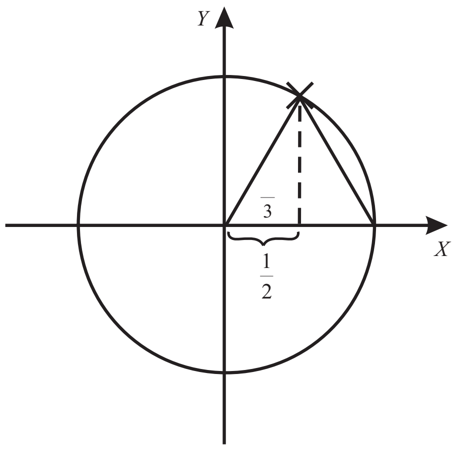


Figura 3.23

3. Si el ángulo es $\frac{\pi}{4}$, es fácil convencerse de que el seno y el coseno coinciden.

$$\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.$$

Por lo tanto, $\cos^2\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = 1$, de donde se deduce que

$$\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

y como $\cos\frac{\pi}{4}$ es positivo, $\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Para hallar $\cos\frac{3\pi}{4}$ se dibuja un ángulo de $\frac{3\pi}{4}$ radianes, como $\cos\frac{3\pi}{4}$ es negativo y $\left|\cos\frac{3\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, se tiene:

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Un método análogo se usa para calcular los cosenos de múltiplos de $\pi/6$. Así, puede elaborarse la siguiente tabla:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1

5. Si A es un punto de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio r y forma un ángulo AOB de θ radianes (donde $B = (r, 0)$), entonces las coordenadas del punto A son $(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ ya que si P es el punto de intersección de la recta OA con la circunferencia unitaria, entonces $P = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Además, los triángulos $\triangle COD$ y $\triangle AOE$ son semejantes. Así,

$$\frac{x}{r} = \cos\theta \quad \text{y} \quad \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta.$$

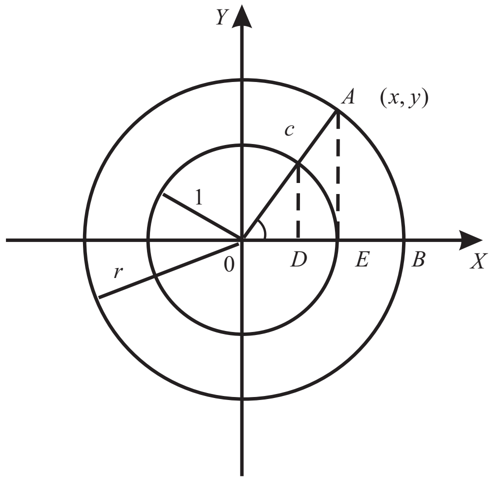


Figura 3.24

6. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, con ángulo recto en C. Si colocamos nuestro sistema de coordenadas con origen en B y eje X en la recta BC, si además D es el punto de intersección de la recta BA con el círculo unitario y si θ es el ángulo $\sphericalangle\, ABC$ medido en radianes, entonces $D = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y por la semejanza de $\triangle ABC$ y $\triangle\, DBE$,

$$\operatorname{sen}\theta = DE = \frac{DE}{BD} = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto (a } \theta)}{\text{hipotenusa}},$$

$$\cos\theta = BE = \frac{BE}{BD} = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto adyacente (a } \theta)}{\text{hipotenusa}}.$$

De este modo recuperamos nuestras bien sabidas definiciones para seno y coseno de ángulos en triángulos rectángulos.

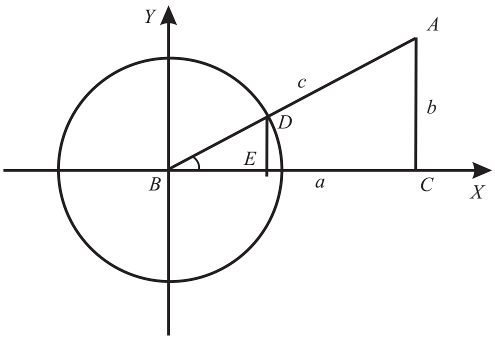


Figura 3.25

7. Usando el ejemplo 6, podemos dar interesantes interpretaciones geométricas de las funciones trigonométricas de θ. Siendo A un punto de la circunferencia unitaria y CD y EF tangentes a dicha circunferencia (ver Figura 3.26).

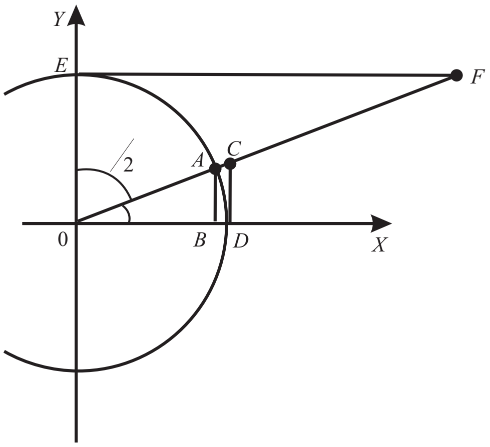


Figura 3.26

$$\text{sen } \theta = BA, \quad \cos \theta = OB, \quad \tan \theta = DC,$$
$$\cot \theta = EF, \quad \sec \theta = OC, \quad \csc \theta = OF.$$

5. Una famosa relación, que se llama "Ley de los cosenos", puede ahora obtenerse fácilmente (ver Figura fig3.27).

   Sea $\triangle AOB$ un triángulo cualquiera de lados a, b, c y supongamos que $\sphericalangle AOB$ mide θ radianes. Si ponemos los ejes coordenados con

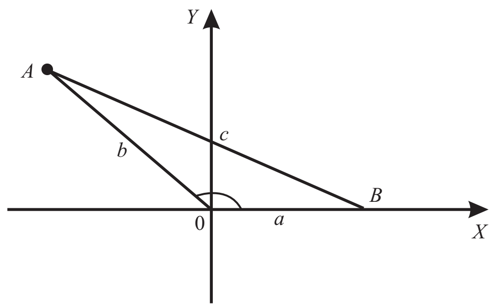


Figura 3.27

origen en O y eje X sobre la recta OB, entonces A estará en una circunferencia con centro en O y radio b por lo que sus coordenadas serán $A = (b \cos\theta,\, b \operatorname{sen}\theta)$ (ver ejemplo 5), mientras que las coordenadas de B son $(a,\, 0)$. Por la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$\begin{aligned} c^2 &= (a - b\cos\theta)^2 + (-b \operatorname{sen}\theta)^2 \\ &= a^2 - 2ab\cos\theta + b^2\cos^2\theta + b^2 \operatorname{sen}^2\theta \\ &= a^2 + b^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) - 2ab\cos\theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$	**Ley de los cosenos.**

Para terminar esta sección, mencionaremos que los ángulos no sólo se miden en radianes sino, como todo mundo sabe, también se miden en grados. Dice "el diccionario" que un grado, $1°$, es cada una de las 360 partes iguales en las que se divide una circunferencia y esta definición, aún siendo poco clara, señala la idea fundamental de que a toda la circunferencia, es decir, a 2π radianes, le corresponden $360°$; a la mitad, o sea π, le tocan $180°$; a $\dfrac{\pi}{2}$ radianes le tocan $90°$ y mediante una sencilla "regla de tres" concluimos que a θ le corresponden $\theta \cdot \dfrac{180}{\pi}$ grados. Por consiguiente podemos definir con precisión la medida de un ángulo en grados.

Definición 3.2.4 La medida de un ángulo de θ radianes en grados es $\theta \cdot \dfrac{180}{\pi}$.

Los grados son usados a veces en las mediciones, pero en Cálculo los radianes son mucho más convenientes y dan lugar a fórmulas de derivación más simples. En estas notas se usarán radianes, salvo previo aviso.

Para derivar las funciones trigonométricas, haremos uso de tres importantes límites:

$$\lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0,$$

que a continuación demostraremos:

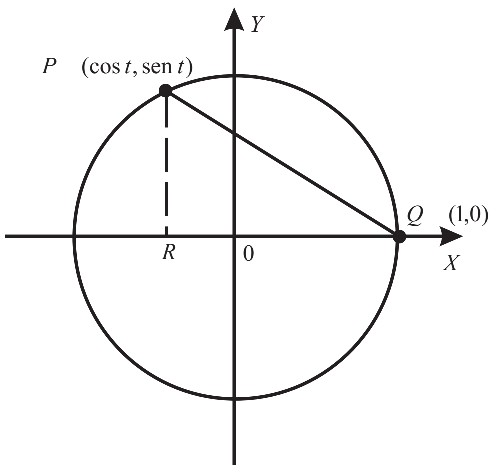


Figura 3.28

Si $-2\pi < t < 2\pi$, el punto $P = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ está a una distancia del punto $Q = (1,0)$ de $|t|$ unidades a lo largo de la circunferencia unitaria, es decir,

$$\overset{\frown}{PQ} = |t|. \tag{3.7}$$

La distancia entre $(1,0)$ y $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ no es mayor que dicha longitud de arco, es decir;

$$\overline{PQ} \leq \overset{\frown}{PQ}. \tag{3.8}$$

Si por P trazamos una perpendicular al eje X y llamamos R al punto de intersección de ambas rectas, entonces $\overline{PR}$ es igual a $|\operatorname{sen} t|$ pero en $\triangle PRQ$, $\overline{PQ}$ es la hipotenusa y $\overline{PR}$ un cateto. Por consiguiente, $|\operatorname{sen} t| = \overline{PR} \leq \overline{PQ}$. Por (3.7), $|\operatorname{sen} t| \leq \overset{\frown}{PQ} = |t|$. Por lo tanto $\lim\limits_{t\to 0} |\operatorname{sen} t| = 0$. Y como $-|\operatorname{sen} t| \leq \operatorname{sen} t \leq |\operatorname{sen} t|$,

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t = 0}$$

También, de las expresiones (3.7) y (3.8) se obtiene que $0 \leq \overline{PQ} \leq |t|$, es decir,

$$0 \leq \sqrt{(\cos\, t - 1)^2 + (\operatorname{sen} t - 0)^2} \leq |t|$$

lo cual equivale a

$$0 \leq \cos^2 t - 2\cos\, t + 1 + \operatorname{sen}^2 t \leq t^2$$

es decir, a

$$0 \leq 2 - 2\cos t \leq t^2. \tag{3.9}$$

Esto a su vez equivale a

$$0 \leq \frac{1 - \cos\, t}{t} \leq \frac{t}{2} \;\; (\text{ si } t > 0) \text{ o } \;\; 0 \geq \frac{1 - \cos\, t}{t} \geq \frac{t}{2} \;\; (\text{ si } t < 0).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1 - \cos\, t}{t} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 0^-} \frac{1 - \cos\, t}{t} = 0$$

y entoces

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos\, t}{t} = 0.}$$

Antes de seguir adelante, señalemos que de las desigualdades (3.9), el estudiante puede obtener (¡fácilmente!) el siguiente límite:

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \cos\, t = 1.}$$

Ahora sí, sigamos adelante: Si llamamos A al punto $(1, \operatorname{sen} t)$ donde $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$, se tendrá $\overset{\frown}{PQ} \leq \overline{PA} + \overline{AQ}$, como se ve en la figura siguiente:

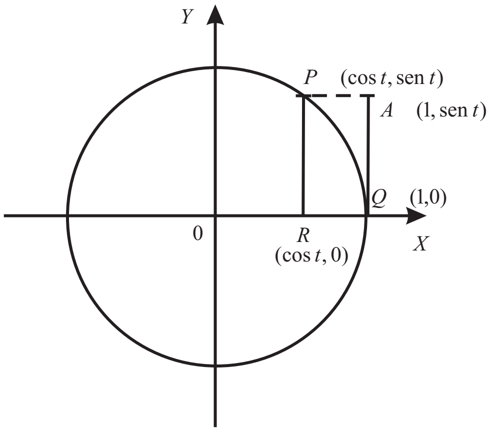


Figura 3.29

Pero $\overset{\frown}{PQ} = |t| = t$,

$$\overline{PA} = \overline{RQ} = |1 - \cos\, t| = 1 - \cos\, t$$

y

$$\overline{AQ} = \overline{PR} = |\operatorname{sen} t| = \operatorname{sen} t.$$

Así que la desigualdad $\overset{\frown}{PQ} \leq \overline{PA} + \overline{AQ}$ se convierte en

$$t \leq 1 - \cos\, t + \operatorname{sen} t$$

y como $\operatorname{sen} t \leq t$, $\;t \leq 1 - \cos\, t + \operatorname{sen} t \leq 1 - \cos\, t + t$ que equivale a

$$1 \leq \frac{1 - \cos\, t}{t} + \frac{\operatorname{sen}\, t}{t} \leq \frac{1 - \cos\, t}{t} + 1.$$

Tomando en cuenta que $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos\, t}{t} = 0$ y haciendo tender t a 0 por la derecha, se obtiene

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

En forma análoga, tomando $-\dfrac{\pi}{2} < t < 0$, se obtiene que

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

Por consiguiente:

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}\ t}{t} = 1}$$

Ahora veamos que las funciones sen y cos son derivables en $\mathbb{R}$. Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces:

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}\ x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\ x\ \cos\ h + \operatorname{sen}\ h\ \cos x - \operatorname{sen}\ x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}\ x(\cos\ h - 1)}{h} + \cos\ x \frac{\operatorname{sen}\ h}{h}\right] \\
&= \operatorname{sen}\ x \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\ h}{h}\right) \\
&= \operatorname{sen}\ x \cdot 0 + \cos\ x \cdot 1 = \cos\ x.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sen}' x = \cos\ x.$$

b)
$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos\ x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos\ x\ \cos h - \operatorname{sen}\ x \operatorname{sen}\ h - \cos\ x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\cos\ x(\cos\ h - 1)}{h} - \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen}\ h}{h}\right] \\
&= \cos\ x \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}\right) - \operatorname{sen}\ x \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\ h}{h}\right) \\
&= \cos\ x \cdot 0 - \operatorname{sen}\ x \cdot 1 = -\operatorname{sen}\ x.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos' x = -\text{sen } x.$$

Automáticamente obtenemos que estas funciones son continuas en $\mathbb{R}$. Podemos ahora derivar las demás funciones trigonométricas:

$$\tan'(x) = \left(\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \text{sen }^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$$

$$\cot'(x) = \left(\frac{\cos x}{\text{sen } x}\right)' = \frac{-\text{sen }^2 x - \cos^2 x}{\text{sen }^2 x} = \frac{-(\text{sen }^2 x + \cos^2 x)}{\text{sen }^2 x} = -\csc^2 x,$$

$$\sec'(x) = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen } x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x,$$

$$\csc'(x) = \left(\frac{1}{\text{sen } x}\right)' = \frac{-\cos x}{\text{sen }^2 x} = -\frac{\cos x}{\text{sen } x}\frac{1}{\text{sen } x} = -\cot x \csc x.$$

Dedicaremos estas últimas páginas sobre funciones trigonométricas a comentarios acerca de las funciones inversas del seno y del coseno.

Usando el Teorema 3.1.2 g) nos damos cuenta de que basta encontrar intervalos cerrados en donde la función seno sea estrictamente creciente o decreciente para que sepamos que existen correspondientes funciones inversas de la función seno. Para decirlo con más precisión, si $[a,\, b]$ es un intervalo en donde la función seno es estrictamente creciente o estrictamente decreciente, existe la función inversa de $\text{sen } : [a,\, b] \to \text{sen }([a,\, b])$, que se denota por $\text{arc sen}_{[a,b]}$ (léase arco seno en $[a,\, b]$) y que resulta ser derivable en todo punto del intervalo abierto $\text{sen }([a,\, b] - \{\text{sen }(a),\, \text{sen }(b)\}$. Por ejemplo, si la función sen es estrictamente creciente en $[a,\, b]$, entonces

$$\text{arc sen}_{[a,b]} : [\text{sen }(a),\, \text{sen }(b)] \to [a,\, b]$$

es la función tal que:

$$\begin{array}{ll} \forall x \in [\text{sen }(a),\, \text{sen }(b)], & \text{sen }(\text{arc sen}_{[a,b]}(x) = x) \\ \forall x \in [a,\, b], & \text{arc sen}_{[a,b]}(\text{sen } x) = x. \end{array}$$

Por el citado Teorema 3.1.2 g) tal función es derivable en $(\operatorname{sen}(a),\, \operatorname{sen}(b))$ y su derivada está dada por la fórmula:

$$\forall x \in (\operatorname{sen}(a),\, \operatorname{sen}(b))\,, \quad (\operatorname{arc\,sen}_{[a,b]})'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen}_{[a,b]}(x))}$$

$$= \frac{1}{\delta\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen}_{[a,b]}(x))}} = \frac{1}{\delta\sqrt{1-x^2}},$$

donde δ es $+1$ ó -1 dependiendo del signo de $\cos x$ en el intervalo $[a,\, b]$ (ya que cos se aplica al punto $\operatorname{arc\,sen}_{[a,b]}(x)$ que está en $[a,\, b]$).

Cuando no haya peligro de confusión, se omitirá el intervalo $[a,\, b]$ en la notación de arc sen $_{[a,b]}$. Así, en algún ejemplo o discusión se puede hablar de la función $\operatorname{arc\,sen} : [-1,\, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right]$ y sabremos perfectamente a qué nos referimos ¿verdad? La derivada de esta función es, por cierto,

$$(\operatorname{arc\,sen})'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \frac{1}{+\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x)}} = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}.$$

Nótese que el signo de la raíz en la derivada es + porque cos es positivo en $\left[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right]$.

Se invita a los estudiantes a aumentar su conocimiento acerca de las inversas de las funciones trigonométricas, haciendo los Ejercicios 2 (1-5) al final de esta sección. Mientras tanto emprendamos el estudio de la importantísima:

§3

3.3 Función exponencial

Comencemos por definir a^n con $n \in \mathbb{N}$:

Definición 3.3.1 Sean $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces:
(1) $a^1 = a$,
(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a^{n+1} = (a^n)a$,
Si $a \neq 0$, definimos también a^0 como 1, esto es, $a^0 = 1$.

Teorema 3.3.1 *Sean* a, $b \in \mathbb{R}$ *y* n, $m \in \mathbb{N}$. *Entonces:*
(1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,
(2) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$,
(3) $(ab)^n = a^n \cdot a^n$,
(4)

i) Si $a > 1$ *y* $n < m$ *entonces* $a^n < a^m$
ii) Si $0 < a < 1$ *y* $n < m$ *entonces* $a^m < a^n$.

Demostración:

(1) (Por inducción sobre m). Sean $n \in \mathbb{N}$ y

$$A = \{m \in \mathbb{N} : a^n \cdot a^m = a^{n+m}\}.$$

$1 \in A$ pues $a^n \cdot a^1 = a^{n+1}$. Si $m \in A$, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ y entonces: $a^n \cdot a^{m+1} = a^n(a^m \cdot a) = (a^n \cdot a^m) \cdot a = a^{(n+m)+1} = a^{n+(m+1)}$. Así, $m + 1 \in A$ y por ende, $A = \mathbb{N}$, es decir, $\forall m \in \mathbb{N}$, $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$.

(2) Ejercicio.

(3) (Por inducción) Sea ahora $A = \{n \in \mathbb{N} : (ab)^n = a^n b^n\}$.
$1 \in A$, ya que $(ab)^1 = ab = a^1 b^1$, por la Definición 3.3.1 I),
Si $n \in A$, entonces $(ab)^n = a^n b^n$, asi que,

$$(ab)^{n+1} = (ab)^n \cdot (ab) = (a^n \cdot b^n)(ab) = (a^n \cdot a)(b^n \cdot b) = a^{n+1} b^{n+1}.$$

Por consiguiente $n + 1 \in A$. Por eso $A = \mathbb{N}$.

(4) i) Supongamos que $a > 1$. Demostraremos, antes que todo, que para toda $n \in \mathbb{N}$, $a^n > 1$. Esto se cumple cuando $n = 1$, pues $a^1 = a > 1$ y si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $a^n > 1$, entonces, multiplicando la desigualdad por a se obtiene $a^{n+1} > a > 1$. Por consiguiente, $a^n > 1 \Rightarrow a^{n+1} > 1$.
Hemos probado por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a^n > 1$. Ahora, si $n < m$ (n, $m \in \mathbb{N}$), entonces $m - n \in \mathbb{N}$ y por lo que acabamos de mostrar, $a^{m-n} > 1$. Multiplicando por a^n se tiene $a^n < a^n(a^{m-n})$, que por (1) de este teorema equivale a $a^n < a^{n+(m-n)}$, es decir, $a^n < a^m$.
ii) Ejercicio. ■

Observe que si $n = 0$, todas las propiedades enumeradas en el Teorema 3.3.1 se cumplen. Con esto tenemos definida la potencia a^n para cualquier real a y para cualquier natural $n \in \mathbb{N}$ y la potencia a^0 para cualquier real $a \neq 0$. Queremos extender nuestra definición de potencias hasta lograr saber qué significa a^h para cualquier real h; además queremos que las propiedades enlistadas en el Teorema 3.3.1 no se pierdan. Comencemos por extender la definición de potencia cuando el exponente es un número negativo.

Definición 3.3.2 Si $a \neq 0$, $u \in \mathbb{Z}$ y $u < 0$. Entonces:

$$a^u = \frac{1}{a^{-u}}.$$

Esta definición afirma que la potencia entera negativa de un real distinto de cero es el inverso multiplicativo de la correspondiente potencia positiva. Por eso tenemos que hacer la restricción, innecesaria en la Definición 3.3.1, de que a debe ser un real distinto de cero. Así,

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5}, \pi^{-1} = \frac{1}{\pi}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{(1/3)^2} = 9.$$

Obsérvese también que a^u pudo definirse como $\left(\frac{1}{a}\right)^{-u}$, puesto que

$$\frac{1}{a^{-u}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-u}.$$

Convencerse de esto es fácil: como $-u \in \mathbb{N}$, por el Teorema 3.3.1,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-u} \cdot a^{-u} = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)^{-u} = 1^{-u} = 1.$$

Así que $\left(\frac{1}{a}\right)^{-u}$ es el inverso multiplicativo de a^{-u}, es decir,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-u} = \frac{1}{a^{-u}}$$

De hecho, podemos enunciar esto como un teorema:

$$\text{Si } a \neq 0 \text{ y } n \in \mathbb{N}, \text{ entonces } \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}.$$

Un corolario sencillo sería:

$$\text{Si } a \neq 0 \text{ y } b \in \mathbb{R}, \text{ entonces } \forall n \in \mathbb{N}, \ \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}.$$

Pero veamos ahora que las propiedades mencionadas en el Teorema 3.3.1 se cumplen también para potencias con exponentes enteros negativos:

Teorema 3.3.2 *Sean* $a \neq 0$, $b \neq 0$ *en* $\mathbb{R}$ *y sean* n, $m \in \mathbb{Z}$. *Entonces:*
1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,
2. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$,
3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$,
4.

i) Si $a > 1$ y $n < m$ entonces $a^n < a^m$
ii) Si $0 < a < 1$ y $n < m$ entonces $a^m < a^n$.

Demostración: Como es de esperarse, sólo revisaremos los casos no contemplados en el Teorema 3.3.1.

1. Dos casos: i) $n < 0$ y $0 \leq m$ y ii) $n < 0$ y $m < 0$
   i) Si $n < 0$ y $m = 0$, claramente es cierto el resultado. Supongamos que $n < 0$ y $0 < m$; entonces $-n$, $m \in \mathbb{N}$ y $-n < m$ ó $m < -n$. Si ocurre el primero, existe $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$ tal que $-n + k = m$. Con esto:
$$a^n a^m = \left(\frac{1}{a^{-n}}\right) a^m = \left(\frac{1}{a^{-n}}\right)\left(a^{-n+k}\right) = \left(\frac{1}{a^{-n}}\right)\left(a^{-n}a^k\right)$$
$$= \left(\frac{a^{-n}}{a^{-n}}\right) a^k = a^k = a^{n+m}$$
   La posibilidad $m < -n$ es similar y se deja como ejercicio.
   ii) Si n, $m < 0$, entonces:
$$a^n a^m = \frac{1}{a^{-n}}\left(\frac{1}{a^{-m}}\right) = \frac{1}{a^{-n}a^{-m}} = \frac{1}{a^{-(n+m)}} = a^{n+m}$$

2. Ejercicio.

3. Ejercicio.

4. i) Consideremos los siguientes casos: a) $n < 0, 0 \leq m$, b) $n < 0$, $m < 0$.
   a) Si $n < 0$ y $m = 0$, se tiene $0 < -n$, o sea, $-n \in \mathbb{N}$. Así, por (4) del Teorema 3.3.1, $1 < a^{-n}$, lo que implica que:
   $$a^n = \frac{1}{a^{-n}} < 1 = a^0.$$
   Si $n < 0$ y $m > 0$, $\quad a^{-n} > 1 \quad$ y $a^m > 1$, así que $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}} < 1 < a^m$.
   b) En el caso en que $n < 0$ y $m < 0$, puesto que $n < m$, debe tenerse $-m < -n$ y como $-m$, $-n$ son naturales, por el Teorema 3.3.1 (4), $a^{-m} < a^{-n}$, de donde se obtiene $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}} < \dfrac{1}{a^{-m}} = a^m$.
   ii) Ejercicio. ■

Definimos ahora a^t donde t es cualquier racional, de modo tal que si t es entero, coincida con la Definición 3.3.2.

Definición 3.3.3 Sean $a > 0$ y $t = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$). Entonces:
$$a^t = a^{n/m} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n .$$

Observemos que $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$, ya que si elevamos ambos miembros a la potencia m, tenemos:
$$\left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^n\right)^m = \left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\right)^n = a^n \qquad \text{y} \quad \left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m = a^n.$$

Como sólo hay un número mayor o igual que cero que elevado a la m da a^n, se concluye la igualdad pregonada.

El hecho de que para cualquier $a \in \mathbb{R}$, si $a > 0$ existe una única raíz n–ésima de a, es decir, un único número $b > 0$ tal que $b^n = a$, es corolario del teorema del valor intermedio y se puede demostrar exactamente como se demostró en el Capítulo 2, Sección 4, que todo número $a \geq 0$ tiene raíz cuadrada.

Teorema 3.3.3 *Sean a, $b \in \mathbb{R}$ con a, b mayores que cero y t, s dos cualquiera números racionales. Entonces:*
1. $a^t \cdot a^s = a^{t+s}$,
2. $(a^t)^s = a^{t \cdot s}$,
3. $(ab)^s = a^s \cdot b^s$,
4.

i) Si $a > 1$ *y* $t > s$, *entonces* $a^s < a^t$
ii) Si $0 < a < 1$ *y* $s < t$, *entonces* $a^t < a^s$.

Demostración:

1. Sean $s = \dfrac{n}{m}$ y $t = \dfrac{c}{d}$. Tenemos también que $s = \dfrac{nd}{md}$ y $t = \dfrac{cm}{dm}$, por lo que

$$a^t a^s = a^{\frac{nd}{md}} \cdot a^{\frac{cm}{dm}} = \left(\sqrt[md]{a}\right)^{nd} \cdot \left(\sqrt[md]{a}\right)^{cm} = \left(\sqrt[md]{a}\right)^{nd+cm} = a^{\frac{nd+cm}{md}} = a^{t+s}.$$

2. Ejercicio.

3. Ejercicio.

4. i) Sean $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < t$. $s = \dfrac{n}{m}$, $t = \dfrac{c}{d}$ $(n, c \in Z,\ m, d \in \mathbb{N})$.

$$s < t \Rightarrow \frac{n}{m} < \frac{c}{d} \Rightarrow nd < cm \Rightarrow \left(\sqrt[md]{a}\right)^{nd} < \left(\sqrt[md]{a}\right)^{cm},$$

por el Teorema 3.3.2 4. i) aplicando al número $\sqrt[md]{a} > 1$. Así,

$$a^s = a^{nd/md} < a^{cm/md} = a^t.$$

ii) Ejercicio.

Definamos ahora a^x para $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, de modo que las propiedades análogas a las enunciadas en los teoremas 3.3.1-3.3.3 sigan siendo válidas.

Definición 3.3.4 Sean $a > 0$, $x \in R$ y $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Una suceción creciente de racionales que converge a x. Entonces:

$$a^x = \lim_{n \to \infty} a^{r_n}.$$

Por supuesto, para que esta definición esté bien hecha, necesitamos probar que:

I) Para cualquier real x existe por lo menos una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ creciente de racionales que converge a x.

II) Dada cualquier sucesión creciente $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de racionales que converge a un real x, la sucesión $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

III) Si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones crecientes de racionales que convergen a un mismo real x, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n}.$$

Demostración de I): Sea $x \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $r_n \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x - \frac{1}{n} < r_n < x - \frac{1}{n+1}$$

(por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$). En particular,

$$x - \frac{1}{n+1} < r_{n+1} < x - \frac{1}{n+2}.$$

Entonces

$$\forall n \in \mathbb{N}: \;\; r_n < x - \frac{1}{n+1} < r_n + 1,$$

así que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Además

$$x = \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \lim_{n\to\infty} r_n \leq \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{1}{n+1}\right) = x,$$

es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

Demostración de II): Supongamos que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de racionales tal que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

i) Supongamos que $a > 1$. Por el Teorema 3.3.3 ($4i$), la sucesión $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Como $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y para cada $n \in \mathbb{N}$, $r_n \leq x$, así que si $n_0 \in \mathbb{N}$ es tal que $n_0 > x$, se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}, r_n < n_0$

y por lo tanto, $a^{r_n} < a^{n_0}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente. Por lo tanto converge, de hecho, a un número mayor o igual a 1.

ii) Si $0 < a < 1$ entonces $\frac{1}{a} > 1$ y como acabamos de ver, la sucesión $\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Como para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{r_n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{r_n}}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}},$$

y $\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, a algo diferente de cero, también $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Demostración de III): Usaremos el siguiente lema.

Lema 3.3.4 *Si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de racionales y $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, entonces $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1.*

Demostración:

i) si $a > 1$ y $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}$,
existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N_1\,,\ 1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon \tag{3.10}$$

(la desigualdad $a^{-\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}}$ se sigue del Teorema 3.2.2 (i), pues $a > 1$).

Sea $n_0 \geq N_1$ fija. Como $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N_2, \quad -\frac{1}{n_0} < r_n < \frac{1}{n_0}$$

Por lo tanto

$$\forall n \geq N_2, \quad a^{-\frac{1}{n}} < a^{r_{n_0}} < a^{\frac{1}{n_0}}$$

pero como $n_0 \geq N_1$, por (3.10) se tiene:

$$n \geq N_2,\ 1-\varepsilon < a^{r_n} < 1+\varepsilon \qquad\qquad \therefore \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = 1$$

ii) Si $0 < a < 1$, entonces $\frac{1}{a} > 1$ y por eso $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} = 1$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{r_n}}\right)} = 1. \blacksquare$$

Ahora sí demostraremos III). Para ello, sean $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de racionales que converge a x y sea $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera de racionales que también converge a x. Como $\lim\limits_{n\to\infty}(r'_n - r_n) = x - x = 0$, por el lema $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{r'_n}}{a^{r_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n - r_n} = 1$. Así, como $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge (por II), se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a^{r_n} \cdot \frac{a^{r'_n}}{a^{r_n}}\right) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a^{r'_n}}{a^{r_n}} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}. \blacksquare$$

Observe que hemos probado algo más fuerte que III): para hallar a^x basta tomar cualquier sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de racionales (aunque no sea creciente) que converge a x y hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$. Así, para evaluar 2^π aproximadamente, recordemos que los racionales

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\ 3.14159,\ 3.141592,\ 3.1415926,$$

son los primeros términos de una sucesión que converge a π. Si evaluamos

$$2^3,\ 2^{3.1},\ 2^{3.14},\ 2^{3.141},\ 2^{3.1415},\ 2^{3.14159},\ 2^{3.141592}, \ldots,$$

nos estaremos aproximando a 2^π. En vez de usar la sucesión

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\ 3.14159, \ldots,$$

se puede usar cualquier sucesión que converja a π, como por ejemplo ésta que no es creciente:

$$3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102}, \ldots$$

(o sea, estas fracciones

$$3,\ 3+\frac{1}{7},\ 3+\frac{1}{7+\frac{1}{15}},\ 3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1}}},\ 3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1+\frac{1}{292}}}}, \ldots).$$

Ahora mostraremos que a^x para $x \in \mathbb{R}$ tiene las mismas propiedades enunciadas en el Teorema 3.3.3 para $x \in \mathbb{Q}$. Para ello será de utilidad el siguiente lema:

Lema 3.3.5 *Si $a > 1$ y $x > 0$, entonces $a^x > 1$.*

Demostración: Como $x > 0$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < q < x$. Si $\varepsilon = x - q > 0$ y si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de racionales que converge a x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$, $x - \varepsilon < r_n < x + \varepsilon$, es decir, $q = x - (x - q) < r_n < x + (x - q)$ y como $a > 1$, $1 = a^0 < a^q < a^{r_n}$. Así que tomando límites, $1 < a^q < a^x$. ■

Teorema 3.3.6 *Si $a > 0$, $b > 0$ y x, y son reales cualesquiera, entonces:*
1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
2. $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$,
3. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$,
4. i) Si $a > 1$ y $x < y$ entonces $a^x < a^y$
ii) Si $0 < a < 1$ y $x < y$ entonces $a^y < a^y$.

Demostración:

1. Sean (r_n) y (s_n) sucesiones de racionales tales que $r_n \to x$ y $s_n \to y$. Por consiguiente, $r_n + s_n \to x + y$ y entonces:

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n+s_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n} \cdot a^{s_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{s_n} = a^x \cdot a^y.$$

Las propiedades 2 y 3 son análogas y se dejan como ejercicio.

4 i) sean x, $y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Entonces $0 < y - x$. Sea $a > 1$, por el último lema, $a^{y-x} > 1$. Por lo tanto, $\dfrac{a^y}{a^x} = a^{y-x} > 1$ y por ende, $a^y > a^x$.
ii) ejercicio. ■

A estas propiedades se puede añadir esta otra.

Teorema 3.3.7 $\forall a > 0\ \forall x \in \mathbb{R},\quad a^x > 0.$

Demostración: Observe que si $q \in \mathbb{Q}$ y $q = \dfrac{n}{m}$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$, por la Definición 3.3.3, $a^q = \sqrt[m]{a^n}$, es decir, es el único número positivo que elevado a la m da a^n. Por eso $a^q > 0$. Y si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de racionales que converge a x, se tiene:
a) si $a > 1$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $a^x \geq a^{r_n} > 0$ (pues a^{r_n} es creciente)
b) Si $0 < a < 1$, entonces $a^{r_n} > a^x$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\frac{1}{a^x} \geq \frac{1}{a^{r_n}} > 0 \Rightarrow a^x > 0. \blacksquare$$

Podemos ahora definir, para cada $a > 0$, una importante función:

Definición 3.3.5 Si $a > 0$ a la función

$$exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $exp_a(x) = a^x$ se le llama **función exponencial** con base a.

Como corolario de los Teoremas 3.3.6 y 3.3.7, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.3.8 *Si $a > 0$ se tiene:*
1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad exp_a(x+y) = exp_a(x) \cdot exp_a(y)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad exp_a(xy) = (exp_a(x))^y$
3. *i) Si $a > 1$, exp_a es estrictamente creciente*
ii) Si $0 < a < 1$, exp_a es estrictamente decreciente
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $exp_a(x) > 0$.

Tomando en cuenta estas propiedades y los siguientes hechos:

$$\forall a > 0 : \exp_a(0) = 1,$$

$$\forall a > 0 : exp_a(1) = a,$$

$$\forall a > 0 : exp_a(-1) = \frac{1}{exp_a(1)} = \frac{1}{a},$$

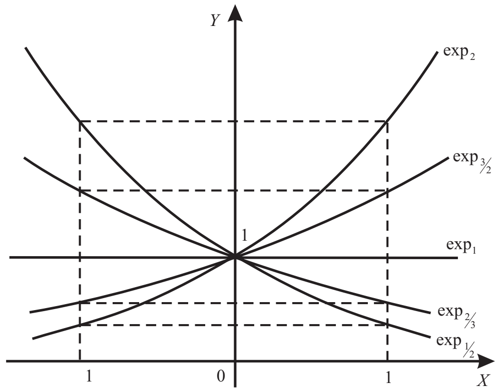


Figura 3.30

ilustramos aproximadamente las gráficas de $exp_a(x)$ para

$$a = 2,\ 1,\ 3/2,\ 2/3,\ 1/2.$$

De manera especial estudiaremos la función exp_e, donde e es el límite de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, estudiada en el Capítulo 1. En dicho capítulo se dejó como un largo ejercicio (ver problema 17 del a) al f) de los Ejercicios 4) demostrar que para toda $r \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$ (si no ha hecho el ejercicio, es el momento adecuado de no pasarlo por alto). Usando este hecho probaremos una importante desigualdad:

Teorema 3.3.9 *(Desigualdad exponencial)*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x.$$

Demostración: Hay una desigualdad cuya demostración suele ser un sencillo ejercicio de inducción matemática, a saber, la desigualdad de Bernoulli:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall \alpha \geq -1, \quad (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Para demostrar la desigualdad exponencial, sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $(r_n)_n \in \mathbb{N}$ una sucesión de racionales que converge a x. Si $n \in \mathbb{N}$ es fija, por el citado ejercicio 17 de los Ejercicios 4.

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{r_n}{m}\right)^m = e^{r_n} \qquad\qquad \text{pues } r_n \in \mathbb{Q}.$$

Si $m \geq -r_n$ entonces $\dfrac{r_n}{m} \geq -1$ y por la desigualdad de Bernoulli,

$$\left(1+\frac{r_n}{m}\right)^m \geq 1+m\left(\frac{r_n}{m}\right) = 1+r_n$$

Por consiguiente,

$$e^{r_n} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r_n}{m}\right)^m \geq \lim_{m\to\infty}(1+r_n) = 1+r_n.$$

Por lo tanto

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{r_n} \geq 1+r_n$$

Por lo tanto

$$e^x = \lim_{n\to\infty} e^{r_n} \geq \lim_{n\to\infty}(1+r_n) = 1+x. \blacksquare$$

Corolario 3.3.10

$$\forall x < 1: \quad e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

Demostración:

$$e^{-x} \geq 1-x \Rightarrow \frac{1}{e^x} \geq 1-x \Rightarrow e^x \leq \frac{1}{1-x}. \blacksquare$$

Corolario 3.3.11

$$\lim_{x\to\infty} exp_e(x) = \infty \qquad y \qquad \lim_{x\to-\infty} exp_e(x) = 0.$$

Demostración: Como para toda $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1+x$,

$$\lim_{x\to\infty} e^x \geq \lim_{x\to\infty}(1+x) = \infty$$

Por el Corolario 3.3.10,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x \leq \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x} = 0$$

Como $e^x \geq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, se concluye que $\lim\limits_{n\to-\infty} e^x = 0$. $\blacksquare$

Corolario 3.3.12 *exp_e es derivable en $\mathbb{R}$ y*

$$\forall x \in \mathbb{R} : exp_e'(x) = exp_e(x).$$

Demostración: Supongamos que $h < 1$. Entonces

$$1 + h \leq e^h \leq \frac{1}{1-h},$$

así que

$$h \leq e^h - 1 \leq \frac{h}{1-h}.$$

a) Si $h > 0$,

$$1 \leq \tfrac{e^h-1}{h} \leq \tfrac{1}{1-h} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^+} \tfrac{e^h-1}{h} = 1.$$

b) Si $0 < h$,

$$1 \geq \tfrac{e^h-1}{h} \geq \tfrac{1}{1-h} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^-} \tfrac{e^h-1}{h} = 1.$$

De los incisos a) y b) se concluye que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$.

Ahora sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\lim_{h\to 0} \frac{exp_e(x+h) - exp_e(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{exp_e(x) exp_e(h) - exp_e(x)}{h}$$

$$= e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Así,

$$\forall x \in \mathbb{R} : exp_e'(x) = exp_e(x). \blacksquare$$

Corolario 3.3.13 *$exp_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ es continua y biyectiva.*

Demostración: La continuidad en $\mathbb{R}$ es consecuencia de la derivabilidad en $\mathbb{R}$. La inyectividad se debe a que exp_e es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ (por el Teorema 3.3.8 ($3i$)). La suprayectividad se sigue del teorema del valor intermedio y del Corolario 2 de esta sección, como sigue: Sea $y > 0$. Como $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tal que si $x \leq M_1$, entonces $e^x < y$. En particular $e^{M_1} < y$. Como $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$, existe $M_2 \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq M_2 \Rightarrow e^x > y$. Por lo tanto, $e^{M_1} < y < e^{M_2}$ y como exp_e es continua en $[M_1, M_2]$, por el teorema del valor intermedio, existe $x \in [M_1, M_2]$ tal que $e^x = y$. ■

Definición 3.3.6 La función **logaritmo base e,** $log_e : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es la función inversa de $exp_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, es decir, la única función tal que

$$\forall\, x > 0 : exp_e(log_e(x)) = x$$

y

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : log_e(exp_e(x)) = x.$$

Nota. Por ser tan usadas las funciones log_e y exp_e, se prescindirá del subíndice e. De este modo, para referirse a ellas, se dirá simplemente log y exp, respectivamente.

He aquí algunas propiedades importantes de la función log:

Teorema 3.3.14 *Se tiene:*
(1) $\forall\, x, y > 0,\ \ log(xy) = log\, x + log\, y$
(2) $\forall\, x > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ log(x^y) = y \cdot logx$
(3) $\forall\, x,\, y > 0,\ \ log\left(\dfrac{x}{y}\right) = log\, x - log\, y$
(4) $log\, 1 = 0$
(5) $log\, e = 1$
(6) log *es estrictamente creciente en* $\mathbb{R}_+$
(7) $log\, x$ *es continua en* $\mathbb{R}_+$
(8) log *es derivable en* $\mathbb{R}_+$ *y para toda* $x \in \mathbb{R}_+$, $(log)'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Demostración:

(1) $e^{log(xy)} = xy = e^{log\, x}\, e^{log\, y} = e^{log\, x + log\, y}$. Como exp es inyectiva,

$$log(xy) = log\, x + log\, y.$$

(2)
$$exp^{log(x^y)} = x^y = (e^{log\,x})^y = e^{y\,log\,x} \Rightarrow log\,x^y = y\,log^x.$$

(3) Por (2), $log(y^{-1}) = -log\,y \;\therefore$
$$log\left(\frac{x}{y}\right) = log(x \cdot y^{-1}) = log\,x + log\,y^{-1} = log\,x - log\,y.$$

(4) $e^{log\,1} = 1 = e^0 \Rightarrow log\,1 = 0.$

(5) $log\,e = log(exp(1)) = 1$ (exp y log son inversos).

(6) y (7) Son corolarios del corolario del Teorema del valor intermedio (¿por qué?). Sin embargo, (7) se puede demostrar también así:
Si $x > 0$, por la desigualdad exponencial $e^{x-1} \geq 1 + x - 1 = x$. Por lo tanto $log\,e^{x-1} \geq \log x$, es decir,
$$\forall x > 0, \;\; logx \leq x - 1.$$

En particular $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow log\,\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$
$$\Rightarrow log\,x = -log\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 - \frac{1}{x}.$$

Así pues, para toda $x > 0$, $\;1 - \frac{1}{x} \leq log\,x \leq x - 1$.
Entonces $\lim\limits_{x\to 1} log\,x = 0$, o sea, log es continua en 1.
Si $x > 0$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$, se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} log\left(\frac{x_n}{x}\right) = 0 \Rightarrow$
$$\lim_{n\to\infty} log(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left[log\left(\frac{x_n}{x}\right) + log\,x\right] = log\,x.$$

Por ende, log es continua en x.

(8) Sean $x_0 > 0$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq x_0$, $\;x_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Como log es biyectiva y es continua en x_0, $(logx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a $log\,x_0$ y

tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $log\, x_n \neq log\, x_0$. En vista de que exp es derivable en $log(x_0)$, se tiene:

$$exp'(log\, x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{log(x_n)} - e^{log(x_0)}}{log(x_n) - log(x_0)}.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{log(x_n) - log(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{log(x_n) - log(x_0)}{e^{log(x_n)} - e^{log(x_0)}}$$

$$= \frac{1}{exp'(log(x_0))} = \frac{1}{e^{log(x_0)}} = \frac{1}{x_0}.\blacksquare$$

No sólo exp tiene inversa. Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la función: $exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ también tiene inversa, lo cual se debe a que:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ a^x = e^{x log\, a}$$

y entonces:

$$a^x = y \Leftrightarrow e^{xlog\, a} = y \Leftrightarrow log\, e^{xlog\, a} = log\, y \Leftrightarrow xlog\, a = log\, y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{log\, y}{log\, a} \ \ (\text{ si } a \neq 1).$$

Es decir, dada $y > 0$, el número $x = \dfrac{log\, y}{log\, a}$ es tal que $a^x = y$ y por lo tanto exp_a (para $a \neq 1$) es suprayectiva y como es estrictamente creciente o estrictamente decreciente (según sea $a > 1$ ó $a < 1$), es inyectiva. $\blacksquare$

Definición 3.3.7 Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la función **logaritmo base** a es la función inversa de $exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ y se denota por log_a.

De esta definición y de la observación hecha antes acerca de la suprayectividad de exp_a, tenemos que $log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es tal que:

a) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ a^{log_a(x)} = x$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ log_a(a^x) = x$

c) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ log_a(x) = \dfrac{log\, x}{log\, a}$

La propiedad c) nos permite inferir que si $a > 0$, $b > 0$ y $a \neq 1 \neq b$, entonces $log_b x = \dfrac{log_a x}{log_a b}$, ya que:

$$\frac{log_a x}{log_a b} = \frac{\frac{log\,x}{log\,a}}{\frac{log\,b}{log\,a}} = \frac{log\,x}{log\,b} = log_b x.$$

Esto nos permite calcular el logaritmo en cualquier base, de cualquier número positivo, si se conocen los logaritmos en alguna base a (por ejemplo si se cuenta con una calculadora o por lo menos se tienen a la mano unas tablas de logaritmos en base 10, que son fáciles de hallar en librerías de prestigio y hasta en alguna de baja estofa).

Otras propiedades de log_a son:

Teorema 3.3.15 *Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Entonces:*
(1) $\forall\, x, y > 0 : log_a(xy) = log_a\, x + log_a\, y$,
(2) $\forall\, x > 0 : \forall y \in \mathbb{R},\;\; log_a(x^y) = y \cdot log_a x$,
(3) $\forall\, x,\, y > 0 :\; log_a \left(\frac{x}{y}\right) = log_a\, x - log_a\, y$,
(4) $log_a\,(1) = 0,\; log_a\, a = 1$,
(5) $a > 1 \Rightarrow log_a$ *es estrictamente creciente,*
(6) $a < 1 \Rightarrow log_a$ *es estrictamente decreciente.*

Demostración: La demostración es una "copia" de la del Teorema 3.2.1 y se deja como ejercicio al lector. ■

Es también muy sencillo demostrar que exp_a y log_a son derivables en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}_+$, respectivamente; basta observar que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad exp_a(x) = a^x = e^{log\,a^x} = e^{x\,log\,a}$$

y que entonces, por la regla de la cadena, si $g(x) = x\,log\,a$,

$$\begin{aligned} exp_a'(x) &= (exp \circ g)'(x) = exp'(g(x)) \cdot g'(x) = exp(g(x)) \cdot log\,a \\ &= e^{x \log\, a} \cdot log\,a = a^x \cdot log\,a \end{aligned}$$

y como para toda $x > 0 : log_a(x) = \frac{log\,x}{log\,a}$, entonces $log_a'(x) = \frac{1}{x\,log\,a}$.

Aún funciones más complicadas como

$$f(x) = g(x)^{h(x)} \qquad\qquad (g \text{ y } h \text{ derivables, } g(x) > 0)$$

son fáciles de derivar si se tiene en cuenta que

$$f(x) = e^{h(x)\, log\, g(x)}$$

y por la regla de la cadena,

$$f'(x) = e^{h(x) log\, g(x)} \cdot \left[h'(x) log\, g(x) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)} \right].$$

Por ejemplo, si para toda $x > 0, g(x) = x$ y para toda $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = a$, entonces para toda $x > 0$, $f(x) = x^a$. Y su derivada es:

$$f'(x) = x^a \cdot \left[0 + a \cdot \frac{1}{x} \right] = ax^a \cdot x^{-1} = ax^{a-1}.$$

Este hecho generaliza el resultado visto en la Sección 1 de este capítulo, que señala que

$$\forall r \in \mathbb{Q} \qquad (x^r)' = r \cdot x^{r-1}, \text{ si } \ x > 0.$$

Otro ejemplo: Si $f(x) = x^x$, $f'(x)$ no es $= x \cdot x^{x-1}$ ¡Cuidado! Hay que recordar que f es una composición de la forma:

$$f(x) = e^{x\, log\, x}$$

y entonces

$$f'(x) = e^{x\, log\, x} \cdot \left(x \cdot \frac{1}{x} + log\, x \right) = x^x (1 + log\, x).$$

Se vio al número e como $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ en el Capítulo 1. Ahora podemos probar algo más general:

$$\text{a) } \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = e \qquad \text{y} \qquad \text{b) } \lim_{y \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = e.$$

Estos hechos son corolario de la continuidad de exp y la derivabilidad de log, ya que como $\lim\limits_{t \to 0} \frac{log(1+t)}{t} = log'(1) = \frac{1}{1} = 1$ y como exp es continua, tenemos que:

$$\lim_{t \to 0} (1 + t)^{1/t} = \lim_{t \to 0} e^{\frac{1}{t} log(1+t)} = e^{\lim\limits_{t \to 0} \frac{log(1+t)}{t}} = e^1 = e.$$

Ahora bien, si $h(y)=\frac{1}{y}$, entonces $\lim\limits_{y\to\infty} h(y)=0$ y $\lim\limits_{y\to-\infty} h(y)=0$. Así, si $l(t)=(1+t)^{1/t}$, aplicando el ejercio 13 a) de "Ejercicios 3. Capítulo 2":

a) $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=\lim\limits_{y\to\infty} l(h(y))=e$

b) $\lim\limits_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=\lim\limits_{y\to-\infty} l(h(y))=e.$

En general, si $h(x)$ es una función tal que $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=0$ y $l(t)$ es como arriba, es decir, $l(t)=(1+t)^{1/t}$, se tiene

$$\lim_{x\to x_0}(1+h(x))^{1/h(x)}=\lim_{x\to x_0} l(h(x))=e.$$

Por ejemplo, si $h(x)=\frac{2}{x+1}$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=0$ y por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}=e.$$

Ahora bien, si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, podemos hacer

$$h(x)=f(x)-1$$

con lo que $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=0$ y por lo que hemos comentado,

$$\lim_{x\to x_0}(1+h(x))^{1/h(x)}=e;$$

entonces, si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x)=c$, se tiene:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}(1+h(x))^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left((1+h(x)^{1/h(x)}\right)^{g(x)h(x)}$$

$$=\lim_{x\to x_0} e^{g(x)h(x)\cdot log(1+h(x))^{1/h(x)}}=e^{c\cdot 1}=e^c.$$

Por ejemplo, hallaremos $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

En este caso, $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ y $g(x)=x$, así que se cumple que

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=1 \qquad \text{y} \quad \text{que} \qquad \lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$$

Sea $h(x) = f(x) - 1 = \frac{x-1}{x+1} - 1 = -\frac{2}{x+1}$. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} g(x)h(x) = \lim_{x\to\infty} -\frac{2x}{x+1} = -2$$

Por consiguiente y según hemos visto, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^{g(x)} = e^{-2}$.

Otro resultado acerca de límites es:

Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 1$, se tienen dos casos:

a) Si $A > 1$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \infty$
b) Si $0 < A < 1$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$

La demostración de estos hechos se dejan como ejercicio al educando, sugiriéndole que se convenza primero de que

$$\lim_{x\to x_0} g(x)log(f(x)) = \begin{cases} \infty & \text{si } A > 1 \\ -\infty & \text{si } A < 1 \end{cases}$$

y por lo tanto que $\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)log\, f(x)}$ es ∞ o es 0 (ver corolario 1 del Teorema 3.12 de esta sección).

Por ejemplo, como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2}{2x^2+1} = \frac{1}{2} < 1$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2} = 0.$$

Finalmente, usando la continuidad de exp y la derivabilidad de log, o más precisamente, el hecho de que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{log(1+t)}{t} = 1$, probaremos esta importante expresión para la función exp:

Teorema 3.3.16 $\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \mathop{lím}\limits_{h\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Demostración: Sea $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Como $\lim\limits_{t\to 0} \frac{log(1+t)}{t} = 1$ y como la sucesión $\left(\dfrac{x}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 y $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{x}{n} \neq 0$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{log(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = 1; \quad \text{por lo tanto,}$$

$$\lim_{n\to\infty} log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\, log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[x\frac{n}{x} log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} x\frac{log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x$$

Como exp es continua en x y la sucesión $\left(log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a x,

$$\lim_{n\to\infty} e^{log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = e^x, \text{ es decir } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x. \blacksquare$$

Esta relación es usada en ciertos modelos matemáticos. Por ejemplo, en el problema 6 de los Ejercicios 1 del Capítulo 1 se pidió encontrar una fórmula de recurrencia para la sucesión a_1, $a_2, \ldots$, donde a_n es el total de dinero que una persona tiene en su cuenta bancaria al cabo de n años, si la tasa de interés anual es $r\%$ y el interés se capitaliza anualmente. Dicha fórmula es:

$$a_n = \left(1+\frac{r}{100}\right)a_{n-1},$$

pues si a_0 es el capital inicial, al cabo de un año, cuando se capitaliza por primera vez el intéres, el capital es $a_1 = a_0 + \frac{r}{100}a_0$.

Al cabo de dos años es

$$a_2 = a_1 + \frac{r}{100}a_1 = a_1\left(1+\frac{r}{100}\right),$$

y así sucesivamente. Veamos cuál es la fórmula de recurrencia que relaciona a_n con a_{n-1} si el interés, a la misma tasa de $r\%$ anual, se capitaliza semestralmente, es decir, 2 veces por año: En el año $n-1$ se tiene la cantidad a_{n-1}. A los seis meses se capitaliza el $\frac{r}{2}\%$, así que al cabo de seis meses el capital es:

$$a_{n-1} + \frac{r}{2}\left(\frac{1}{100}\right)a_{n-1} = a_{n-1}\left(1+\frac{r}{200}\right).$$

Al cabo de un año se capitaliza el otro $\frac{r}{2}\%$ y se tiene entonces:

$$a_n = a_{n-1}\left(1+\frac{r}{200}\right) + \frac{r}{200}\left(a_{n-1}\left(1+\frac{r}{200}\right)\right)$$
$$= a_{n-1}\left(1+\frac{r}{200}\right)\left(1+\frac{r}{200}\right) = a_{n-1}\left(1+\frac{r}{200}\right)^2.$$

Del mismo modo, se puede ver que si el interés se capitaliza trimestralmente (4 veces por año), se tiene $a_n = a_{n-1}\left(1 + \frac{r}{400}\right)^4$. En general, si un banco ofrece $r\%$ de interés sobre depósito, capitalizándolo n veces por año, entonces la cantidad invertida crecerá por un factor $\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^n$ por año. Por ejemplo, un depósito de \$1000.00 al 6% de interés se convertirá, al final del año, en:

$$1000\left(1 + \frac{6}{400}\right)^4 = \$\ 1061.36 \qquad \text{capitalizándolo trimestralmente}$$

$$1000\left(1 + \frac{6}{36500}\right)^{365} = \$\ 1061.8314 \qquad \text{capitalizándolo diariamente}$$

$$1000\left(1 + \frac{6}{2436500}\right)^{24365} = \$\ 1061.8362 \qquad \text{capitalizándolo cada hora.}$$

Entre más veces al año se capitalice el interés, más crecerá la cuenta cada año. Si el interés se capitaliza a cada momento, se podría pensar que la cuenta crece muchísimo, pero como se ve en los cálculos anteriores, no hay tal cosa: cada año crecerá el capital por un factor igual a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{100\,n}\right)^n = e^{\frac{r}{100}}$$

que realmente no es mucho. Por ejemplo, los mil pesos invertidos al 6% de interés, nunca pueden crecer en un año más que

$$\$\ 1000\,e^{0.6} = \$\ 1061.8366$$

Como otro ejemplo, se puede construir un modelo matemático del fenómeno de "explosión demográfica" si denotamos el tiempo (número de años transcurridos desde algún momento inicial) por t, la población en el tiempo t por $f(t)$ y las tasas de nacimientos y muertes anuales respecto al total de la población por b y d y suponemos, para mayor sencillez, que b y d son constantes. Analicemos los cambios de la población durante un año que supondremos comienza en un momento t_0 y termina en $t_0 + 1$. Entonces:

$$\begin{array}{ll}
\text{Número de personas vivas en el tiempo } t_0 & = f(t_0), \\
\text{Número de nacimientos entre } t_0 \text{ y } t_0 + 1 & \cong b\,f(t_0), \\
\text{Número de muertos entre } t_0 \text{ y } t_0 + 1 & \cong d\,f(t_0), \\
\text{Núm. de personas vivas en el tiempo } t_0 + 1 & \cong f(t_0) + b\,f(t_0) - d\,f(t_0)
\end{array}$$

Si hacemos $x = b - d$, x será la tasa neta de crecimiento anual de la población por persona y

$$f(t_0 + 1) \cong f(t_0) + x\, f(t_0) = (1 + x)f(t_0).$$

Usamos aquí el símbolo $\cong$ para indicar que $(1+x)f(t_0)$ es sólo una aproximación a $f(t_0 + 1)$, ya que hemos calculado los nacimientos y muertes como si la población tuviera el valor constante $f(t_0)$ durante todo el año. Podemos precisar mejor nuestros cálculos suponiendo que la población es mayor en el segundo semestre que en el primero (como suele suceder en realidad) y en consecuencia tendremos más nacimientos y muertes en el segundo semestre que en el primero (con tasas constantes de nacimientos y muertes). Los cálculos para el primer semestre son:

Número de personas vivas en el tiempo t_0	$= f(t_0)$
Número de nacimientos en el primer semestre	$\cong \frac{1}{2}b\, f(t_0)$
Número de muertos en el primer semestre	$\cong \frac{1}{2}d\, f(t_0)$
Número de personas vivas en el tiempo $t_0 + \frac{1}{2}$	$\cong f(t_0)\left(1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d\right)$

o sea, $f\left(t_0 + \frac{1}{2}\right) \cong \left(1 + \frac{x}{2}\right) f(t_0)$.
Para el segundo semestre quedaría:

$$f(t_0 + 1) \cong \left(1 + \frac{1}{2}x\right) f\left(t_0 + \frac{1}{2}\right) \cong \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2 f(t_0).$$

Mediante subdivisiones del año en más y más partes, podemos obtener mejores aproximaciones de $f(t_0 + 1)$. Así, la subdivisión del año en n partes iguales, nos produce: $f(t_0 + 1) \cong \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n f(t_0)$. Si como es de suponerse, la población varía a cada instante, tendremos:

$$f(t_0 + 1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n f(t_0) = e^x f(t_0).$$

Ejercicios 2.

1. Demuestre que son periódicas las funciones:

   a) $f(x) = x - [x]$, b) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$, c) $g(x) = \cot x$

   (en a) y b), $[x] = \text{mín}\{z \in Z | z \leq x\}$).

2. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es llamada

   (a) Impar, si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$,
   (b) Par, si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$

   En cada caso decida si la función dada es par, impar o ninguno de estos tipos de funciones:

   a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^3$, c) $f(x) = \operatorname{sen} x$, d) $f(x) = \cos x$,

   e) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$, f) $f(x) = x + x^2$, g) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

3. Demostrar las fórmulas:

   (a) $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$,
   (b) $\tan 2\theta = \dfrac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$,
   (c) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$,
   (d) $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$,
   (e) $\operatorname{sen} x \cos y = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y))$,
   (f) $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{2}(A + B) \cos \dfrac{1}{2}(A - B)$,
   (g) $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \dfrac{1}{2}(A + B) \operatorname{sen} \dfrac{1}{2}(A - B)$,
   (h) $\cos A + \cos B = 2 \cos \dfrac{1}{2}(A + B) \cos \dfrac{1}{2}(A - B)$,

(i) $\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B).$

4. Demostrar que:

a) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0,$ b) $\lim_{x\to \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1,$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = 0,$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\alpha x} = 1$ si $\alpha \neq 0,$

e) $\lim_{x\to \alpha} \frac{\operatorname{sen}(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}$ si $\alpha \neq 0,$ f) $\lim_{x\to \infty} \frac{x+\cos x}{x+1} = 1,$

g) $\lim_{x\to \infty} \cos \frac{1}{x} = 1,$ i) $\lim_{x\to 2} \log \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\right) = \log 2,$

h) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\right)^{1+x} = 2.$

5. Calcular los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to 2\pi} \left[\frac{1-\cos x}{(x-2\pi)^2}\right],$ b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x},$

c) $\lim_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{1/x},$ d) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2},$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ $(a>0),$ f) $\lim_{n\to \infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n^2},$

g) $\lim_{n\to \infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{n},$ h) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{2n}{n+1}},$

i) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{n}}.$

6. Diga a qué función corresponden las siguientes gráficas:

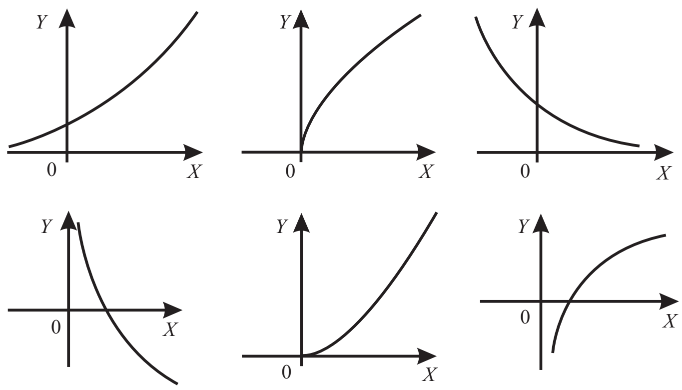


Figura 3.31

Funciones: a) $y = x^{\sqrt{3}}$, b) $y = x^{1/\sqrt{3}}$, c) $y = log_{1/2}x$, d) $y = (\sqrt[2]{3})^x$, e) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$, f) $y = log_2 x$.

7. ¿Cómo están relacionadas las gráficas de $exp_{1/b}$ y $exp_b\, x$?

8. La gráfica de $y = log_b\, x$ contiene al punto $(3, 1/3)$. ¿Quién es b?

9. Demuestre que si $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$, entonces $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{e^{-h} - 1}{-h} = 1$

10. Demuestre el Teorema 3.3.15

11. ¿Por qué $\operatorname{sen} x$ es creciente en $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$?
    ¿Por qué $\cos\, x$ es positiva en $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$?

12. Usando el Teorema 3.1.2 g), demostrar que $log\, x$ es derivable. (Sugerencia: usar que $log\, x$ es la función inversa de exp).

13. Demuestre que si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 1$, con $A > 0$, entonces

    (a) $A > 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \infty$

    (b) $0 < A < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$

14. Demuestre que para toda $x > 0$, $log\, x = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{x} - 1)\, n$. Sugerencia: ¿quién es $exp'_x(0)$?

15. Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))))$, b) $f(x) = \frac{1}{x - \frac{2}{x + \operatorname{sen} x}}$,
c) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen} x^2))$, d) $f(x) = 3\,x^{\sqrt{x}}$,
e) $f(x) = \operatorname{sen}(6\cos(6\operatorname{sen}(6\cos 6x)))$, f) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}$,
g) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right)$, h) $f(x) = log\sqrt{\left(\frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}\right)}$,
i) $f(x) = log\frac{x^2 + 2^x}{x^2 - 2^x}$, j) $f(x) = (\cos)^{\tan\frac{x}{2}}$,
k) $f(x) = 3x^{\sqrt{x}}$, l) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{(\cos x)^x}$,
m) $f(x) = log_2(\operatorname{sen} x^2)$, n) $f(x) = log\sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$,
ñ) $f(x) = (1 + log_8\, x)^{log_3\sqrt{x}}$, o) $f(x) = (\tan x)^{\cot x}$,

p) $f(x) = \operatorname{sen}(x^4 + 1) \cdot log_8(14x - \operatorname{sen} x)$

q) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

16. a) Demuestre que
$$\lim_{x\to\infty} log\, x = \infty$$
(Sugerencia: hágalo por la definición de límite)
b) Demuestre que
$$\lim_{x\to 0^+} log\, x = -\infty$$
(Sugerencia: use el inciso a)).

17. ¿Por qué $\operatorname{sen} x$ es creciente en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?
¿Por qué $\cos x$ es positiva en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

18. Demuestre que la función $f(x) = \cos x$, con $x \in [0, \pi]$, tiene inversa f^{-1} que es derivable en $(-1, 1)$ y que
$$\forall x \in (-1\,1), \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

19. Calcular la derivada de arc $\cos_{[a,\,b]}$, donde $[a, b]$ es un intervalo en donde cos es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

20. Demostrar que la función $f(x) = \tan x$, con $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tiene inversa f^{-1} que es derivable en $\mathbb{R}$ y tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

21. Si llamamos arc sen a arc sen$_{[-\pi/2,\pi/2]}$, arc cos a arc cos$_{[0,\pi]}$ y arc tan a la función f^{-1} del problema anterior, derivar lar siguientes funciones:

   a) $f(x) = \text{arc sen}\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$, b) $f(t) = \text{arc sen}\,(3t-1)$,
   c) $f(s) = \text{arc cos}(1-s^2)$, d) $g(x) = \text{arc cos}\,\frac{x}{3}$,
   e) $h(x) = \text{arc tan}\, x^2$, f) $l(x) = \text{arc tan}(1-2x)$,
   g) $u(x) = \left(x(\text{arc sen}\, x) + \sqrt{1-x^2}\right)$,
   h) $g(\theta) = (\text{arc cos}\,\theta)(\text{arc sen}\,\theta)$.

§4

3.4 Teorema del valor medio

A partir de información acerca de f, hemos podido obtener en secciones anteriores, información sobre f'. El que f' nos diga cosas de f requiere algún trabajo adicional, que es el objetivo de esta nueva sección. Recordemos que $f'(x)$ no es igual a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

para ninguna h particular, sino el límite de estos números cuando h tiende a cero. ¿Cómo saber a partir de esto, cosas de f? Por ejemplo, si $f'(x) = 0$ para toda x en el dominio de f, ¿debe ser f una función constante? En casos particulares la respuesta es afirmativa: si la velocidad de una partícula es constantemente cero, evidentemente la partícula debe estar en reposo. El sí para la pregunta general tiene su justificación en el Teorema del *valor medio* que establece además conclusiones mucho más fuertes. Este resultado es considerado por algunos como el más profundo acerca de derivadas. Su enunciado es muy simple.

Teorema 3.4.1 ***(Del valor medio).*** *Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), existe (por lo menos) un número $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Antes de la demostración de este teorema, haremos algunos comentarios.

Geométricamente, el teorema del valor medio significa que alguna tangente a la gráfica de f es paralela a la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Otra manera de entender este resultado es el siguiente:
Si f representa la función distancia, $f(b) - f(a)$ es la distancia recorrida entre el tiempo a y el tiempo b y $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la velocidad promedio (o velocidad media) entre estos dos instantes, el teorema dice que en algún momento entre a y b (puede ser en varios momentos) la velocidad instantánea fue igual a la velocidad promedio.

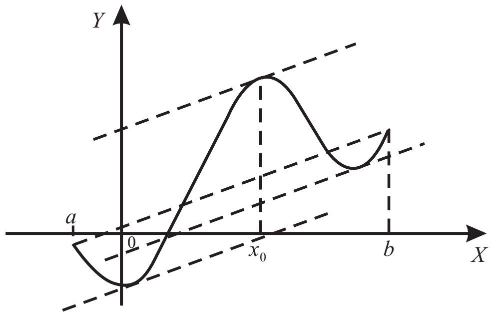


Figura 3.32

Observemos que la suposición de que sea f derivable en todo punto de (a, b), es una condición necesaria; por ejemplo, si f es:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ -x + 2 & \text{si } 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

entonces no existe ningún punto $x_0 \in (0, 2)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

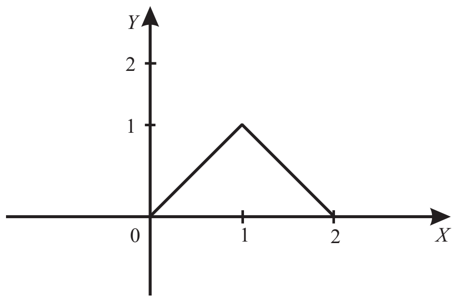


Figura 3.33

También la continuidad en $[a,\, b]$ es una condición necesaria. Por ejemplo:

$$n(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Aquí también $f(0) = 0 = f(1)$ pero no existe ningún $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

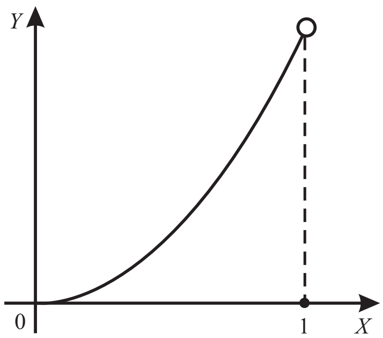


Figura 3.34

Demostraremos el Teorema del valor medio demostrando antes el caso particular en que $f(a) = f(b)$. Este caso particular se llama *Teorema de Rolle.* En la demostración de este último usaremos el siguiente resultado sencillo de probar pero cuya utilidad será sólo suficientemente bien ponderada cuando tengamos que encontrar los valores máximo y mínimo de una función en un intervalo, cosa que haremos hasta la siguiente sección.

Teorema 3.4.2 *Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto x_0 del intervalo (a, b) y $f(x_0)$ es el máximo de f en (a, b) (o si $f(x_0)$ es el mínimo de f en (a, b)), entonces:*

$$f'(x_0) = 0.$$

Demostración: Si $f(x_0)$ es el máximo de f en (a, b),

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad \text{si } h > 0 \text{ y}$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \qquad \text{si } h < 0.$$

Como f es derivable en x_0, existen:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ y } \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

que, por las desigualdades anteriores, cumplen:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \text{ y } \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Como ambos límites son iguales a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

se tiene que $f'(x_0) = 0$ (el caso en que $f(x_0)$ es el mínimo es ejercicio).
■

Teorema 3.4.3 ***(Teorema de Rolle)*** *Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe (por lo menos) un número $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

Demostración: Como f es continua en $[a, b]$, f alcanza su valor máximo en $x_1 \in [a, b]$ y alcanza su mínimo en $x_2 \in [a, b]$ (Teorema 2.4.10).

a) Si $x_1 \in (a, b)$, por el teorema anterior $f'(x_1) = 0$ y x_1 es el punto que andamos buscando.

b) Si $x_2 \in (a, b)$, por el teorema anterior $f'(x_2) = 0$ y x_2 es el punto que andamos buscando.

c) Si $x_1, x_2 \in \{a, b\}$ entonces el valor máximo de f es igual a su valor mínimo y por eso f es constante. Por lo tanto para toda $x \in (a, b)$, $f'(x) = 0$ y cualquier punto del intervalo (a, b) es el punto que andamos buscando.

La siguiente Figura ilustra el Teorema de Rolle.

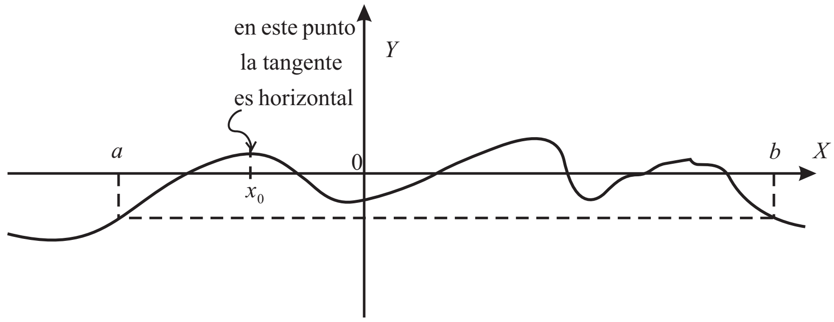


Figura 3.35: Función "Puebla Mirabilis"

Ahora sí, con el Teorema de Rolle en la mano, demostraremos el Teorema del valor medio:

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a, b) y sea $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función tal que

$$\forall x \in [a, b],\ h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) - f(a)$$

h es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $h(a) = h(b) = 0$

Por el Teorema de Rolle, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Por eso $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ y ¡ya!

El Teorema del valor medio puede ser útil también para hacer aproximaciones numéricas. Por ejemplo, veamos que $\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$. Para tal efecto, sea $f : [64, 66] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$. Es claro que se satisfacen las condiciones del Teorema del valor medio, así que existe

$x_0 \in (64, 66)$ tal que

$$\frac{\sqrt{66}-8}{2} = \frac{1}{2x_0^{1/2}},$$

es decir, $\dfrac{1}{x_0^{1/2}} = \sqrt{66} - 8.$

Pero $64 < x_0 < 66$ y de aquí que $x_0 < 81$. Por lo tanto

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{x_0^{1/2}} < \frac{1}{8},$$

de donde se tiene el resultado deseado. ■

Corolario 3.4.4 *Si f está definida en un intervalo abierto y $f'(x) = 0$ para toda x en el intervalo, entonces f es constante en el intervalo.*

Demostración: Sean a y b dos puntos cualesquiera del intervalo abierto en el que f está definida y supongamos que $a < b$. Por el Teorema del valor medio, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(x_0) = 0$ y por consiguiente $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, lo que inplica que $f(b) = f(a)$. Entonces el valor de f en dos puntos cualesquiera del intervalo es el mismo, es decir, f es constante en el intervalo. ■

Naturalmente, este corolario no necesariamente se cumple para funciones definidas en la unión de dos o más intervalos (ver ejercicio 16).

Corolario 3.4.5 *Si f y g están definidas en un intervalo abierto y $f'(x) = g'(x)$ para toda x en dicho intervalo, entonces existe un número c tal que en cualquier x del intervalo se tiene que: $f(x) = g(x) + c$.*

Demostración: En toda x del intervalo, $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Por el Corolario 1, $f - g$ es constante en el intervalo, es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que para toda x en el susodicho intervalo, $f(x) - g(x) = c$. ■

Corolario 3.4.6 *Si $f'(x) > 0$ para toda x en un intervalo abierto, entonces f es estrictamente creciente en tal intervalo. Si $f'(x) < 0$ para toda x en un intervalo abierto, entonces f es estrictamente decreciente en dicho intervalo.*

Demostración: Supongamos que $f'(x) > 0$ en el intervalo.
Si suponemos que a y b son puntos de tal intervalo y que $a < b$, por el Teorema del valor medio existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

pero $f'(x_0) > 0$. Por lo tanto, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$, lo que implica que $f(b) > f(a)$.
Análogamente se prueba la segunda parte del corolario. ■

Observe que la demostración del Corolario 3.4.6 se puede adecuar para obtener los siguientes resultados:

Corolario 3.4.7 *Si $f'(x) \geq 0$ (respectivamente $f'(x) \leq 0$) en un intervalo abierto, entonces f es creciente (respectivamente, decreciente) en tal intervalo.*

Como aplicación del Corolario 3.4.6, probaremos a continuación que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{log\, x}{x} = 0. \tag{3.11}$$

Si $f(x) = \dfrac{log\, x}{x}$, entonces $f'(x) = \dfrac{x\left(\frac{1}{x}\right) - log\, x}{x^2} = \dfrac{1 - log\, x}{x^2}$
así que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow log\, x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - log\, x > 0 \Leftrightarrow 1 > log\, x \Leftrightarrow x < e.$$

Por lo tanto, f es creciente estrictamente en $(0, e)$ y decreciente estrictamente en (e, ∞). (En particular e es el máximo de f en $(0, \infty)$).
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, se puede suponer que para toda $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in (e, \infty)$. Sean $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $n_0 > \dfrac{2}{\varepsilon} + 1$

(y por lo tanto, tal que $\dfrac{2}{n_0 - 1} < \varepsilon$); como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $x_n > e^{n_0}$ y como $f(x)$ es decreciente estrictamente en (e, ∞), tenemos:

$$\forall n \geq N, \ \frac{log\, x_n}{x_n} < \frac{log\, e^{n_0}}{e^{n_0}} = \frac{n_0}{e^{n_0}} < \frac{n_0}{2^{n_0}} = \frac{n_0}{(1+1)^{n_0}}$$

$$= \frac{n_0}{1 + n_0 + \frac{n_0(n_0-1)}{2} + \cdots + 1} \leq \frac{n_0}{n_0\left(\frac{n_0-1}{2}\right)} = \frac{2}{n_0 - 1} < \varepsilon.$$

Aprovechemos el resultado (3.11) para demostrar que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $g(x) = \dfrac{x^n}{e^x}$. Entonces

$$log\, g(x) = log \frac{x^n}{e^x} = log\, x^n - log\, e^x = n\, log\, x - x.$$

Por (3.11),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{log\, g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(n \frac{log\, x}{x} - 1 \right) = -1.$$

Así,

$$\lim_{x\to\infty} log\, g(x) = \lim_{x\to\infty} x \left(\frac{log\, g(x)}{x} \right) = -\infty.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} e^{log\, g(x)} = 0.$$

El siguiente corolario es una generalización del Teorema del valor medio y tiene interés por sus aplicaciones.

Corolario 3.4.8 ***(Teorema del valor medio de Cauchy)*** *Si f y g son continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces existe un número $t \in (a,b)$ tal que*

$$[f(b) - f(a)]\, g'(t) = [g(b) - g(a)]\, f'(t).$$

(si $g(b) - g(a) \neq 0$ y $g'(t) \neq 0$, esta igualdad se puede escribir:

$$\left.\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}\right).$$

Demostración: Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in [a,b]$,

$$h(x) = f(x)\,[g(b) - g(a)] - g(x)\,[f(b) - f(a)]\,.$$

Entonces h es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y

$$h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b).$$

Por el Teorema de Rolle (Teorema 3.4.3) se sigue que existe $t \in (a,b)$ tal que $h'(t) = 0$, es decir,

$$0 = h'(t) = f'(t)\,[g(b) - g(a)] - g'(t)\,[f(b) - f(a)]\,.\blacksquare$$

Notemos que, poniendo $g(x) = x$ en el corolario anterior, obtenemos el Teorema del valor medio (Teorema 3.4.1). Por eso es una generalización de este teorema. El Teorema del valor medio de Cauchy es el instrumento básico que se necesita para demostrar un teorema que facilita el cálculo de límites de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

cuando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

Teorema 3.4.9 ***(Regla de L'Hôpital para formas indeterminadas $\frac{0}{0}$).*** *Supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ y que existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Entonces existe*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

y

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración: Supongamos que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. Probaremos que para cada $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que para toda $x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$,

$$\frac{f(x)}{g(x)}\in(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon).$$

Sea $\varepsilon>0$, como $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$,

$$\exists\,\delta>0\ \forall x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\}:\frac{f'(x)}{g'(x)}\in\Big(A-\frac{\varepsilon}{2},A+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\tag{3.12}$$

Mostremos que

$$\forall x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\}:\frac{f(x)}{g(x)}\in(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon).$$

Sea $x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$.

(i) Supongamos que $x\in(a,a+\delta)$. Sea $y\in(a,x)$. Como f y g son continuas en $[y,x]$ y derivables en (y,x), por el Teorema del valor medio de Cauchy, existe $t\in(y,x)$ tal que

$$[f(x)-f(y)]\,g'(t)=[g(x)-g(y)]\,f'(t).$$

Pero la existencia de $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ implica que existe $\delta'>0$ tal que para cada $s\in(a-\delta',a+\delta')-\{a\}$, $g'(s)\neq0$. Podemos suponer que $\delta=\delta'$. Por lo tanto, $g'(t)\neq0$.

Por otro lado, si $g(x)=g(y)$, por el Teorema de Rolle, existiría un punto $s\in(y,x)$ tal que $g'(s)=0$ y esto, como acabamos de ver, no puede ser. Por lo tanto, $g(x)\neq g(y)$, y entonces:

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Tomando en cuenta 3.12, hemos probado que

$$\forall y\in(a,x):A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}<A+\frac{\varepsilon}{2}.\tag{3.13}$$

Como $\lim\limits_{y\to a^+} f(y) = \lim\limits_{y\to a^+} g(y) = 0$ tomando límites en 3.13, queda:

$$A - \varepsilon < A - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq A + \frac{\varepsilon}{2} < A + \varepsilon.$$

Así,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon),$$

como queríamos.

(ii) Supongamos que $x \in (a - \delta, a)$, se prueba análogamente que en este caso también

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon). \blacksquare$$

Aplicando este teorema obtenemos, por ejemplo, que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\ x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\ x}{1} = 1$$

y que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\ x}{1} = 0.$$

Ejercicios 3.

1. Si $f(x) = x^3$ en el intervalo $[-1, 3]$, encuentre explícitamente los valores de x_0 cuya existencia está garantizada por el Teorema del valor medio.

2. Para cada función en el intervalo $[x_1, x_2]$, encuentre los valores de x_0 garantizados por el Teorema del valor medio.

   a) $f(x) = 2x$, b) $f(x) = x^2$,

   c) $f(x) = 5x^3 + 2x$, d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

   (Respuestas:

   a) x_0 cualquier elemento del intervalo (x_1, x_2), b) $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$,

   c) $x_0 = \sqrt{\frac{x_1^2+x_1 x_2+x_2^2}{3}}$, d) $x_0 = \left(\frac{x_1^{2/3}+x_1^{1/3}x_2^{1/3}+x_2^{2/3}}{3}\right)^{2/3}$).

3. Muéstrese que la consecuencia del Teorema del valor medio no se cumple para las funciones siguientes cuando los dos puntos a y b se toman con signos opuestos (por ejemplo, para $a = -1,\ b = 1$).
   a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, b) $f(x) = |x|$, c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

4. Aunque las funciones siguientes no son derivables en 0, pruébese que existen valores x_0 que satisfacen la consecuencia del Teorema del valor medio en $[-1, 1]$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } -1 \le x \le 0, \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } -1 \le x \le 0, \\ x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

5. Sea $f(x) = x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x$. Note que $f(0) = f(2) = 0$. Demuestre sin calcular, que el polinomio $g(x) = 4x^2 - 27x^2 + 52x - 24$ tiene por lo menos una raíz que se encuentra en el intervalo $(0, 2)$.

6. Demostrar que si $\dfrac{a_0}{1} + \dfrac{a_1}{2} + \cdots + \dfrac{a_n}{n} = 0$, entonces, para alguna $x \in (0, 1)$ se tiene

$$a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n = 0$$

   (Sugerencia: inspírese en el problema anterior).

7. (a) Demostrar que entre dos raíces de un polinomio hay por lo menos una raíz de su derivada.
   (b) Suponga que todo polinomio de grado 5 tiene a lo sumo 5 raíces reales. Demostrar que entonces todo polinomio de grado 6 tiene por lo mucho 6 raíces reales reales (Sugerencia: ¿cuál es el grado de la derivada de un polinomio de grado 6?).
   (c) Usando la técnica de (b), demostrar por inducción matemática sobre n, que todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales.

8. Demuestre que si para toda $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$, f no puede tener más de una raíz.

9. Demuestre que si f tiene n raíces reales en $[a,\, b]$, entonces f' tiene por lo menos $n-1$ raíces en $[a,\, b]$. Se está suponiendo que f es derivable en $[a,\, b]$.

10. Demostrar que si m es un natural cualquiera entonces la función $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ no tiene nunca dos raíces en $[0, 1]$ (Esto es una consecuencia fácil del Teorema de Rolle. Al terminar la demostración trace las gráficas de f_0 y f_1 y considere la posición de la gráfica de f_m en relación a ellas).

11. Suponga que f es n veces derivable y que $f(x)$ es igual a cero para $n+1$ diferentes valores de x. Demostrar que para algún x, $f^{(n)}(x) = 0$.

12. Suponga que f es derivable y que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Demuestre que existe un punto $x_0 \in (0,\, 1)$ tal que $f'(x_0) = 2x_0$.

13. (a) Demuestre que si f es derivable y creciente en $(a,\, b)$ entonces para toda $x \in (a,\, b)$, $f'(x) \geq 0$.
    (b) Demuestre que aunque se suponga que f es estrictamente creciente en $(a,\, b)$, no se puede asegurar que para toda $x \in (a,\, b)$, $f'(x) > 0$

14. Suponga que f es continua y derivable en $[0, 1]$, que para toda $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$ y que para toda $x \in [0, 1], f'(x) \neq 1$. Demostrar que existe exactamente un número $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$. (La existencia está garantizada por el ejercicio 17 de la serie de Ejercicios 4, Capítulo 2).

15. Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. ¿En qué intervalo f es creciente? ¿En qué intervalo es decreciente?

16. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, 1) \\ 2 & \text{si } x \in (3, 4) \end{cases}$
    Demuestre que para toda $x \in (0, 1) \cup (3, 4)$, $f'(x) = 0$ y que sin embargo f no es constante en $(0, 1) \cup (3, 4)$.

17. (a) Supongamos que f y g son continuas en $[a,\, b]$ y derivables en $(a,\, b)$ y supongamos que $f(a) = g(a)$ y que $f(b) = g(b)$. Entonces existe un punto $x_0 \in (a,\, b)$ tal que $f'(x_0) = g'(x_0)$,

(b) Si dos caballos comienzan y terminan juntos una carrera en el hipódromo, demuestre que en algún instante, durante la carrera, ellos llevaban la mismísima velocidad. ¿En algún instante tuvieron la misma aceleración?

18. Sea $f(x) = x^7 - x^5 - x^4 + 2x + 1$. Pruebe que la gráfica de f tiene pendiente 2 en algún punto entre -1 y 1.

19. Si f es dos veces derivable en (a, b) y $f(x) = 0$ en tres puntos distintos de (a, b), pruebe que hay un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f''(x_0) = 0$.

20. Demuestre que si f es continua en $[a, b]$ y para toda $x \in (a, b)$, $f'(x) > 0$, entonces f es estrictamente creciente en $[a, b]$.

21. Demuestre que si f es continua en $[a, b]$ y para toda $x \in (a, b)$, $f'(x) < 0$, entonces f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.

22. Demuestre que si existen δ_1, δ_2 mayores que cero tales que para toda $x \in (x_0 - \delta_1,\, x_0)$, $f'(x) > 0$ y para toda $x \in (x_0,\, x_0 + \delta_2)$, $f'(x) < 0$ y si f es continua en x_0, entonces f alcaza su máximo en x_0, en $(x_0 - \delta_1,\, x_0 + \delta_2)$.

23. Demuestre que si existen δ_1, δ_2 mayores que cero tales que para toda $x \in (x_0 - \delta_1,\, x_0)$, $f'(x) < 0$ y para toda $x \in (x_0,\, x_0 + \delta_2)$, $f'(x) > 0$ y si f es continua en x_0, entonces f alcaza su mínimo en x_0, en $(x_0 - \delta_1,\, x_0 + \delta_2)$.

24. ¿Quién es mayor: e^π o π^e? (Sugerencia: compare $\log e^\pi$ con $\log \pi^e$. Para ello use el ejercicio 21 para demostrar que la función $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ es estrictamente decreciente en $[e, \pi]$).

25. Use el Teorema del valor medio para demostrar que:

    (a) $\sqrt{101}$ está entre 10 y 10.05,

    (b) $\operatorname{sen} 46^o$ es aproximadamente igual a $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(1 + \dfrac{\pi}{180}\right)$,

    (c) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq \operatorname{arc\,sen} x \geq x$ si $x \in [0,\, 1)$. ¿Cuándo se cumple la igualdad?,

(d) $log(1+x^2) \leq x^2$ si $x \geq 0$.

26. Pruebe que si f es derivable en $[a, b]$ y $f'(a) < c < f'(b)$, entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = c$. Esta propiedad del valor intermedio para derivadas fue descubierta por Gaston Darboux (1842–1917). (Sugerencia: Si c está entre $f'(a)$ y $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ o si c está entre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y $f'(b)$, use primero el teorema del valor intermedio para funciones continuas y luego el del valor medio.)

27. Si una función f es discontinua en x_0, se dice que f tiene una discontinuidad de primera clase o discontinuidad simple en x_0, si existen $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$. Demuestre que si f es derivable en $[a, b]$, entonces f' no puede tener discontinuidad simple en ningún punto de $[a, b]$ (Sugerencia: use el ejercicio 26).

28. El teorema de Darboux enunciado en el ejercicio 26 es útil cuando uno desea demostrar que una función dada no puede ser una derivada. por ejemplo, sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Pruebe que no existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$ (Sugerencia: g no cumple la propiedad del valor intermedio en un cierto intervalo).

29. Supongamos que f es derivable en $[a, b]$ y $f''(x)$ existe en (a, b). Demuestre que hay por lo menos un t en (a, b) tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(a)(b-a) + f''(t)\frac{(b-a)^2}{2}.$$

(Sugerencia: si

$$\begin{aligned} g(x) &= f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \\ &\quad - \left[\tfrac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left(f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)\right)\right], \end{aligned}$$

entonces $g(a) = g(b) = 0$, así que existe $t \in (a, b)$ tal que $g'(t) = 0$).

30. Pruebe que si f tiene segunda derivada continua en (a, b) y si $c \in (a,\, b)$ es tal que $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f asume un mínimo relativo en c. (Sugerencia: Existe $\delta > 0$ tal que, para cada $x \in (c-\delta, c+\delta)$, $f''(x) > 0$. Por el ejercicio 29, si $x \in (c-\delta, c+\delta)$, $f(x) - f(c) = f''(t) \cdot \dfrac{(c-x)^2}{2} > 0$).

31. Si f'' es continua en x_0, demuestre que

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + 2h) + f(x_0) - 2f(x_0 + h)}{h^2}$$

(Sugerencia: use la regla de L'Hôpital repetidamente).

32. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hôpital?:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

33. Use la regla de L'Hôpital para encontrar los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$, (b) $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) \cot x$,

(c) $\lim_{x \to 1} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$, (d) $\lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}}$,

(e) $\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{e^x - 1}$, donde $n \in \mathbb{N}$ (f) $\lim_{x \to 1} \frac{x}{\tan x}$,

(g) $\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1}$, (h) $\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{\log(2x-1)}$.

34. Aplique la regla de L'Hôpital repetidamente para hallar los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$, (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x^3)}{\operatorname{sen}^3(2x)}$, (d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan^{-1}(x^2)}{x \operatorname{sen} x}$.

§5

3.5 Máximos y mínimos

En el Capítulo 2 dimos la siguiente definición: "Una función f definida en algún subconjunto A de números reales alcanza su valor máximo en un punto $x_0 \in A$ si y sólo si para toda $x \in A$, $f(x_0) \geq f(x)$ y alcanza su valor mínimo en un punto $x_1 \in A$ si para toda $x \in A$, $f(x_1) \leq f(x)$".

A $f(x_0)$ se le llama el *valor máximo* (o simplemente el *máximo*) de f en A. A veces se le llama *máximo absoluto* de f en A.
A $f(x_0)$ se le llama el *valor mínimo* (o simplemente el *mínimo*) de f en A. A veces se le llama *mínimo absoluto* de f en A.

Vimos también que tales valores "extremos" pueden o no ser alcanzados en puntos de A, pero que si este conjunto es un intervalo cerrado y f es continua en él, f sí alcanza sus valores máximo y mínimo en A.

Consideremos aquí la siguiente función: $f(x) = |x^2+x-6|$. Su gráfica es como sigue:

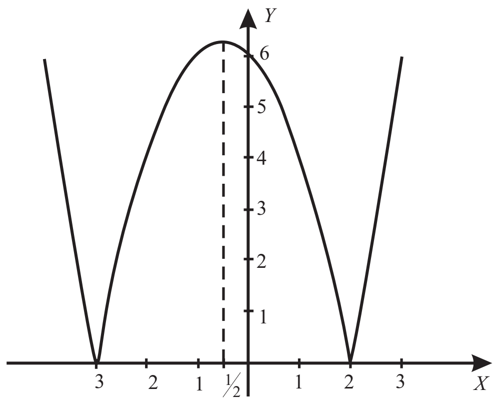


Figura 3.36

f no alcanza su máximo en $\mathbb{R}$ (su mínimo sí. ¿Cuál es?); sin embargo en $x = -\frac{1}{2}$ f alcanza algo parecido a un máximo, al menos para puntos en una vecindad de $x = -\frac{1}{2}$. Conocer valores de x donde ocurren cosas similares a éstas es más de una vez importante. El estudio de este tipo de situaciones ocupará nuestra atención en esta sección.

Definición 3.5.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función y $x_0 \in A$. Diremos que:

a) **f alcanza un máximo relativo** en x_0 si existe un intervalo abierto I tal que $I \subseteq A$ y para toda $x \in I$, $f(x_0) \geq f(x)$. En este caso se dirá que $f(x_0)$ es un **máximo relativo** de f en A.

b) **f alcanza un mínimo relativo** en x_0 si existe un intervalo abierto I tal que $I \subseteq A$ y para toda $x \in I$, $f(x_0) \leq f(x)$. A $f(x_0)$ se le llama **mínimo relativo** de f en A.

De manera similar se define el concepto de mínimo relativo. El siguiente teorema es corolario del Teorema 3.4.2. Demuéstrelo por favor.

Teorema 3.5.1 *Si $f(x_0)$ es un máximo relativo de f y $f'(x_0)$ existe, entonces $f'(x_0) = 0$.*

La siguiente terminología es de uso común.

1. Los valores extremos de una función son los máximos y los mínimos relativos. (A veces se refiere uno a ellos como los "extremos relativos de f").

2. Los puntos críticos de una función f en un conjunto A son los puntos donde la derivada es cero o no existe. (A veces a los puntos en los que f' no existe se les llama singulares).

3. Si A es un intervalo cerrado, los puntos críticos son donde la derivada es cero, no existe y los extremos del intervalo.

Los ejercicios 22 y 23 de la página 217, permiten investigar más acerca de la naturaleza de f en aquellos puntos donde f' es cero.

Ejemplo. Si $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + 5$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ o $x = -1$. Por otra parte $f'(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, por esto si $2 < x$, entonces $0 < x - 2$ y $3 < x + 1$ por lo que $0 < f'(x)$ para tales x. Si $-1 < x < 2$, $-3 < x - 2 < 0$ y $0 < x + 1 < 3$ consecuentemente $f'(x) < 0$ en tal caso, por los ejercicios mencionados anteriormente f es estrictamente creciente en $[2, 2 + \delta_1)$ para algún $\delta_1 > 0$ y estrictamente decreciente en $(-1, 2]$, concluimos por esto que $f(2)$ es un mínimo relativo.

Pudiera pensarse que si $f'(x_0) = 0$, $f(x_0)$ debe ser necesariamente un máximo o un mínimo relativo, ¡No es así!, la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ es un ejemplo de esto, ya que $f'(x) = 1 + \cos x$ por lo tanto $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$, consideremos el caso $x_0 = \pi$.

$$\text{Si } \pi/2 < x < \pi, \ -1 < \cos x < 0 \text{ por lo que } 0 < 1 + \cos x.$$

$$\text{Si } \pi < x < \frac{3}{2}\pi, \ -1 < \cos x < 0 \text{ por lo que } 0 < 1 + \cos x$$

por esto $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ es estrictamente creciente a la izquierda y también a la derecha de π, con esto $f(\pi)$ no es ni máximo ni mínimo relativo.

Esta forma de estudiar las funciones en los puntos críticos puede aplicarse aún cuando f no sea derivable en x_0 (pero sí continua) siempre que exista la derivada en los restantes puntos de una vecindad de x_0 (para que se convenza de ello, le rogamos que relea los ejercicios 20 y 23 de la página 217 y que, si no lo ha hecho, que los resuelva). La función $f(x) = |x|$ nos da un ejemplo de lo anterior, ya que no es derivable en 0, pero $f'(x)$ es menor que 0 (es -1) a la izquierda de 0 y mayor que 0 (es 1) a la derecha de 0, por lo cual $f(0) = 0$ es un mínimo relativo.

Empieza a mostrarse el poder de la derivada en el estudio de las funciones, si éstas son derivables dos veces el estudio de los puntos críticos puede hacerse en ocasiones de forma más rápida.

Teorema 3.5.2 *Dado $f'(x_0) = 0$, se tiene que:*

a) Si $f''(x_0) > 0$, entonces $f(x_0)$ es un mínimo relativo,

b) Si $f''(x_0) < 0$, entonces $f(x_0)$ es un máximo relativo.

¡Ojo!, ¡Muchísimo ojo! si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$ para conocer la naturaleza de $f(x_0)$ debe estudiarse el comportamiento de f en una vecindad de x_0 ya que todo puede suceder, como se ve en los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

1. Si $f(x) = x^4$, $f'(0) = 0 = f''(0)$ y $f(0)$ es un mínimo relativo de f.
2. Si $g(x) = -x^4$, $g'(0) = 0 = g''(0)$ y $g(0)$ es un máximo relativo.
3. Si $h(x) = x^3$, $h'(0) = h''(0) = 0$ y $h(0)$ no es ni máximo ni mínimo relativo ya que si $x < 0$, entonces $x^3 < 0 = h(0)$ y si $0 < x$, entonces $h(0) = 0 < x^3$.

Alertado sobre esto pasemos a la demostración del teorema.

Demostración:
a) Como $f''(x_0)$ existe, f' es continua en x_0, si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$, por esto existe una vecindad de x_0 donde

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

si $x_0 < x$ entonces $f'(x) > 0$ y si $x < x_0$ entonces $f'(x) < 0$, por los ejercicios 20 y 21 de la página 217, f es estrictamente creciente a la derecha de x_0 y estrictamente decreciente a la izquierda de x_0, por lo cual $f(x_0)$ es un mínimo relativo.

Repitiendo este razonamiento se prueba b). ■

Ejemplos:

1. Encontrar los máximos y mínimos relativos de

$$f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x + 5.$$

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 36x + 96$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 12x + 32) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ó $x = 8$
$f''(x) = 6x - 36$
$f''(4) = -12$. Así, $f(4) = 163$ es un máximo relativo.
$f''(8) = 12$. Luego, $f(8) = 133$ es un mínimo relativo.

2. Si $f(x) = x^r - rx + k$ donde $r > 0$ y $r \neq 1$, entonces;
   a) Si $0 < r < 1$, f tiene un máximo relativo en 1.
   b) Si $1 < r$, f tiene un mínimo relativo en 1.

   Demostración: $f'(x) = rx^{r-1} - r$, claramente $f'(1) = 0$
   $f''(x) = r(r-1)x^{r-2}$
   $f''(1) = r(r-1)$.

   a) Si $0 < r < 1$, $-1 < r - 1 < 0$ por lo que $r(r-1) < 0$. Conforme al Teorema 3.5.2, $f(1)$ es un máximo relativo.
   b) Si $1 < r$, $0 < r - 1$ por lo que $0 < r(r-1)$ y así $f(1)$ es un mínimo relativo. ■

3. Determinar a, b y $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga en 1 un máximo relativo igual a 7 y la gráfica que pase por $(2, -2)$.

   Solución: $f(1) = a + b + c = 7$
   $f'(x) = 2ax + b$
   $f''(x) = 2a$
   $f'(1) = 2a + b = 0$
   $f'(2) = 4a + 2b + c = -2$.

   Así las condiciones del problema se traducen en el siguiente sistema de ecuaciones

   $$a + b + c = 7, \quad 2a + b = 0, \quad 4a + 2b + c = -2$$

   que tiene la solución $a = -9$, $b = 18$ y $c = -2$. Como

   $$f'(1) = 2a = 2(-9) = -18,$$

   $f(x) = -9x^2 + 18x - 2$ es la función buscada.

Los siguientes son algunos ejemplos que pretenden mostrar cómo pueden emplearse los resultados sobre máximos y mínimos en la solución de algunos problemas prácticos.

Ejemplos:

1. Se cuenta con material para hacer una cerca de longitud l metros, se desea cercar un potrero de forma rectangular. ¿Qué dimensiones debe tener el potrero para que el área sea máxima?

   Solución: Sea x y y las dimensiones del potrero, el área es por tanto $A = x \cdot y$. Por otra parte $x + y = \frac{l}{2}$, así que $y = \frac{l}{2} - x$ entonces $A = x\left(\frac{l}{2} - x\right) = \frac{l}{2}x - x^2$, $A'(x) = \frac{l}{2} - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{l}{4}$, $A''(x) = -2 < 0$ por lo tanto $A''\left(\frac{l}{4}\right) < 0$ teniéndose que $A\left(\frac{l}{4}\right)$ es máximo, como $\frac{l}{4} + y = \frac{l}{2}$, $y = \frac{l}{4}$ con lo que $x = y = \frac{l}{4}$. El terreno debe ser cuadrado.

2. Un productor vende cierto artículo a distribuidores a \$ 20 cada uno si le piden menos de 50; si le piden 50 o más (hasta 600) el precio por artículo se reduce a razón de 2 centavos por el número pedido. ¿Cuál es el tamaño del pedido que produce mayor cantidad de dinero al productor?

   Solución: Analicemos inicialmente el caso en que el número de artículos es menor que 50, si x representa esta cantidad, el producto por la venta es $20x$ que es menor que $(20) \cdot (50)$. Si $50 \leq x \leq 600$, el precio por cada artículo es $20 - 0.02x$ por esto el ingreso por la venta de estos artículos es:

   $$I(x) = (20 - 0.02x)x = 20x - 0.02x^2$$

   $$I'(x) = 20 - 0.04x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{20}{0.04} = 500$$

   $I''(x) = -0.04$, así $I''(500) < 0$ por lo cual, $I(500) = 10,000$ es el máximo ingreso.

3. Se va a construir un silo coronado por una semiesfera (es decir, un cilindro sobre el cual se monta una semiesfera). Supóngase que los costos del material y de la mano de obra por metro cuadrado del piso, de la pared y del techo son \$ 500, \$ 1200 y \$ 1500 respectivamente. Determinar las dimensiones más económicas, si el volumen total es de 42750π metros cúbicos.

Solución: Si x es el radio del cilindro y por tanto del piso y por tanto del techo, la superficie del piso es πx^2, la del cilindro $(2\pi x)h$ y la de la esfera $4\pi x^2$; Así el costo por la construcción del piso es $\pi x^2 P_1$, de la pared $(2\pi x h)P_2$ y del techo $4\pi x^2 P_3$, siendo el costo total

$$C(x,\, h) = \pi x^2 P_1 + (2\pi x h)P_2 + 4\pi x^2 P_3.$$

El dato de que el volumen del silo debe ser V permite tener a C como una función de una sola variable, pues si $V = \pi x^2 h + \dfrac{2}{3}\pi x^3$ despejando h de aquí se tendrá que $h = \dfrac{V}{\pi x^2} - \dfrac{2}{3}x$ y con esto que

$$\begin{aligned} C(x) &= \pi x^2 P_1 + 2\pi x\left(\frac{V}{\pi x^2} - \frac{2}{3}x\right)P_2 + 4\pi x^2 P_3 \\ &= \pi P_1 x^2 + \left(\frac{2V}{x} - \frac{4}{3}\pi x^2\right)P_2 + 4\pi x^2 P_3 \\ &= \left(\pi P_1 - \frac{4}{3}\pi P_2 + 4\pi P_3\right)x^2 + \frac{2V}{x} = Kx^2 + \frac{2V}{x}. \end{aligned}$$

$$C'(x) = 2Kx - \frac{2V}{x^2}.$$

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2Kx^3 - 2V}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V}{K}}.$$

$$C''(x) = 2K + \frac{4V}{x^3}.$$

$$C''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{K}}\right) > 0.$$

Así el costo es mínimo si el radio es $x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{K}}$.

4. Una cerca de 8 mts. de altura colocada al nivel del piso corre paralela a un edificio alto. La cerca se encuentra a un metro del edificio. Encuentre la longitud de la escalera más corta que pueda colocarse en el suelo y recargarse en el edificio por encima de la cerca.

Solución:

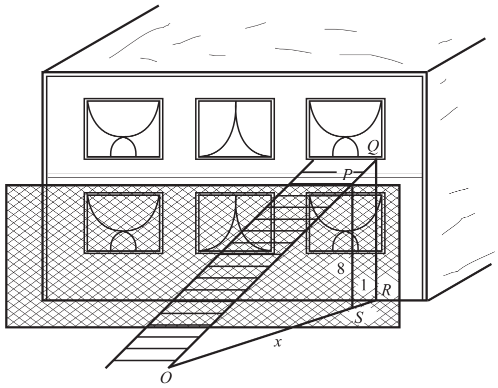


Figura 3.37

De la Figura 3.37, los triángulos OPS y OQR son semejantes, así que

$$\frac{y}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2+64}}{x}$$

o equivalentemente

$$y = \left(\frac{\sqrt{x^2+64}}{x}\right)(x+1)$$

$$y' = \left(\frac{x^3-64}{x^2\sqrt{x^2+64}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Compruebe que y'' evaluada en $x = 4$ es positiva, con lo que la longitud de la escalera más corta es:

$$y = \frac{\sqrt{16+64}}{4}\cdot 5 = \frac{5}{4}\sqrt{80} = 5\sqrt{5}.$$

5. Se traza una recta desde el punto $(0,\, a)$ hasta el eje horizontal y desde ahí al punto $(c,\, b)$ como en la Figura 3.38. Demostrar que la longitud total es la mínima cuando los ángulos α y β son iguales.

   Solución:

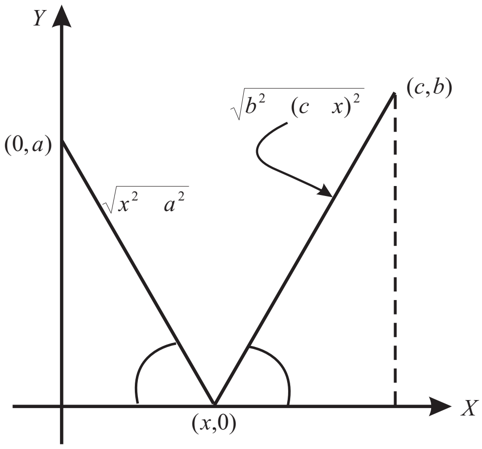


Figura 3.38

   La longitud total está dada por:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$$

$$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} \Leftrightarrow \cos\,\alpha = \cos\,\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

   por ser ángulos agudos.

Los teoremas estudiados en esta sección, permiten decidir sobre los máximos y mínimos relativos; en ocasiones, por la naturaleza del problema, alguno de estos valores coinciden con el máximo de la función o bien con el mínimo de la función en todo su dominio (ver la Definición 2.7). Tal ha sido el caso en los problemas de aplicación, pero en general, estos, bien pueden no existir. No obstante cuando la función se estudia y es continua en un intervalo cerrado, se puede afirmar lo siguiente.

Teorema 3.5.3 *Si $f : [a, b] \to R$ es continua y $f(x_0)$ es el máximo de f, entonces:*

a) $x_0 \in (a, b)$ *y* $f'(x_0) = 0$ *o*

b) $x_0 \in (a, b)$ *pero* $f'(x_0)$ *no existe o*

c) $x_0 = a$ *o* $x_0 = b$.

No ofrece dificultad la demostración de esta afirmación (use el Teorema 3.4.2).

Ejemplo. Hallar la distancia más larga y más corta del punto (1, 7) a la gráfica de la función $f(x) = 7 + \sqrt{100 - x^2}$.

Solución: La distancia de los puntos de la gráfica de f al punto (1, 7) está dada por

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{(x-1)^2 + (7 + \sqrt{100 - x^2} - 7)^2} \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + 100 - x^2} = \sqrt{101 - 2x}. \end{aligned}$$

$$d'(x) = -\frac{2}{2\sqrt{101 - 2x}},$$

d' nunca es cero y d' sí existe para $x \in (-10, 10)$. Así que, conforme al teorema, el máximo y mínimo debe alcanzarse en los extremos.

$$d(-10) = \sqrt{121} = 11, \qquad d(10) = 9,$$

son el máximo y el mínimo de d, respectivamente.

Ejercicios 4.

1. Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones y determine su naturaleza (encuentre el máximo y el mínimo, si existen).

   a) $f(x) = x^4 + 3x^2$, d) $f(x) = (x-1)^2(x-3)^{2/3}$,

   b) $f(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{x}$, e) $f(x) = x^2 + \dfrac{9}{x}$.

   c) $f(x) = x^3 - \dfrac{16}{x}$,

2. Para cada una de las siguientes funciones, identifique los puntos críticos y determine su naturaleza, halle el (los) máximo(s) y el (los) mínimo(s) de cada función en el intervalo indicado:

   (a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ sobre $[-2, 2]$,

   (b) $f(x) = x^5 + x + 1$ sobre $[-1, 1]$,

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ sobre $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$,

   (d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ sobre $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$,

   (e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ sobre $[0, 5]$,

   (f) $f(x) = |x-2|$ en el intervalo $[1, 5]$,

   (g) $f(x) = |5-3x|$ en el intervalo $[0, 3]$,

   (h) $f(x) = [5x]$ en el intervalo $\left[-\dfrac{3}{2}, 4\right]$.

3. Sea a el radio de un semicírculo. Encuentre las dimensiones del rectángulo inscrito de área máxima, si se requiere que dos de los vértices del rectángulo estén sobre el diámetro.

4. Una pieza larga y rectangular de lámina de 30 cms. de ancho va a convertirse en un canal para agua doblando hacia arriba dos de sus lados hasta formar ángulos rectos con la base. ¿Cuál debe ser el ancho de las paredes dobladas para que el canal tenga una capacidad máxima?

5. Demuestre que el rectángulo de área máxima con perímetro dado p es un cuadrado.

6. La resistencia de una viga de sección rectangular es directamente proporcional a su ancho y al cuadrado de su altura. Encuentre las dimensiones de la viga más resistente que pueda cortarse de un tronco cilíndrico de radio a.

7. Al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados se genera un cilindro circular recto. ¿Si el perímetro P del rectángulo está dado,

cuáles son las dimensiones del rectángulo que genera al cilindro de máximo volumen?

8. A la 1:00 P.M. el barco A se encuentra 30 millas al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 millas por hora. El barco B viaja hacia el oeste a 10 millas por hora. ¿A qué hora será mínima la distancia entre los dos barcos?

9. Una compañía de bienes raíces es dueña de 180 apartamentos que se ocupan en su totalidad cuando la renta es fija en $3000.00 mensuales, la compañía calcula que por cada $100.00 de aumento en la renta se desocupan 5 apartamentos. ¿Cuál es la renta mensual con la que la compañía obtendrá el mayor ingreso bruto?

10. Se va a partir un alambre de 36 cms. de largo en dos pedazos. Uno de los pedazos se dobla para formar un triángulo equilátero y el otro para formar un rectángulo dos veces más largo que ancho. ¿Cómo debe partirse el alambre para que el área combinada de las dos figuras sea, (a) mínima, (b) máxima?

11. Un recipiente metálico sin tapa con extremos semicirculares debe tener una capacidad de 128π pies cúbicos. Determine su radio r y su longitud h si se requiere que el recipiente tenga la menor capacidad de material en su construcción.

12. Muestre que, de todos los triángulos con perímetro dado, el triángulo equilátero posee el área máxima.

13. Probar que si $p > 1$ y $x > 0$, entonces $x^p - 1 \geq p(x - 1)$.

14. Dados n números fijos a_1, a_2, $\ldots$, a_n, determinar x de modo que $\sum_{i=1}^{n}(a_i - x)^2$ sea mínimo.

15. Dos pasillos de anchura respectiva a y b se encuentran formando un ángulo recto. ¿Qué longitud máxima puede tener una escalera de mano para poder ser pasada horizontalmente de uno a otro pasillo? (Fig. 1 de la Figura 3.39).

16. Demostrar que la suma de un número y su recíproco es por lo menos dos.

17. Se dobla el ángulo inferior derecho de una hoja de papel de modo que toque el lado izquierdo, tal como se indica en la Fig. 2 de la Figura 3.39. Si la anchura de la hoja de papel es α y la hoja es muy larga, demostrar que la longitud mínima de la señal del doblez es $\dfrac{3\sqrt{3}\alpha}{4}$.

18. Se desplaza un ángulo recto a lo largo del diámetro de un círculo de radio a, ver Fig. 3 de la Figura 3.39. ¿Qué longitud máxima $A+B$ puede ser interceptada por el círculo?

19. Hallar el valor mínimo de $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x-a_i|$ si $a_1<a_2<\cdots<a_n$.

20. Sea $a>0$. Demostrar que el valor máximo de
$$f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-a|}$$
es $\dfrac{2+a}{1+a}$ (puede hallarse por separado la derivada en $(-\infty,\,0)$, $(0,\,a)$, $(a,\,+\infty)$).

21. Una batería tiene una fuerza electromotriz de E voltios y una resistencia interna de r ohmios. Cuando se conecta a una red con una resistencia R. La corriente x (amperios) que fluye a través de R es $x=\dfrac{E}{R+r}$ y la potencia P (vatios) llevada a la red es $P=x^2R$. ¿Qué valor de R maximiza la potencia? Sugerencia: consultar con el profesor Dey.

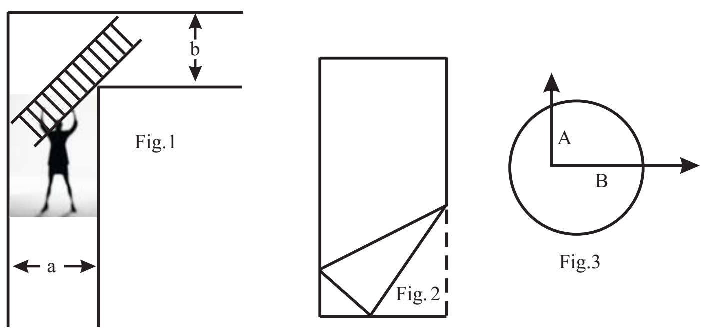


Figura 3.39

§6

3.6 Gráficas de funciones

Recordemos que la gráfica de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es decir, podemos pensar que la gráfica de una función real de variable real es un conjunto de puntos en el plano. En esta sección presentaremos las razones que justifican que la gráfica de una función se "dibuje" de cierta forma en el plano. En secciones anteriores hemos indicado como ciertas propiedades de las funciones producen ciertas características en la gráfica de una función, por ejemplo:

- Si f es par, la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y.
- Si f es impar, la gráfica de f es simétrica con respecto al origen.
- Si f es periódica de período k, bastará estudiar la función en un intervalo de longitud k, partir $\mathbb{R}$ en intervalos de longitud k y repetir su gráfica en cada uno de estos intervalos.
- Si f tiene un máximo local en x_0, $(x_0,\ f(x_0))$ es la cima de una loma de la gráfica de f.
- Si f tiene un mínimo local en x_0, $(x_0,\ f(x_0))$ es el fondo de un valle de la gráfica de f.
- Si f es asintótica a la recta l, la gráfica se acerca a l "por arriba o por debajo".
- Si f es creciente en un intervalo I y $a,\ b \in I$ con $a < b$, la gráfica de f es una cuesta que va del punto $(a,\ f(a))$ al punto $(b,\ f(b))$.
- Si f es decreciente en un intervalo I y $a,\ b \in I$ con $a < b$, la gráfica de f en el intervalo $[a,\ b]$ es una pendiente que baja de $(a,\ f(a))$ a $(b,\ f(b))$.

Ahora bien, si f es creciente en un intervalo I y $a,\ b \in I$, pongamos atención en los siguientes casos:

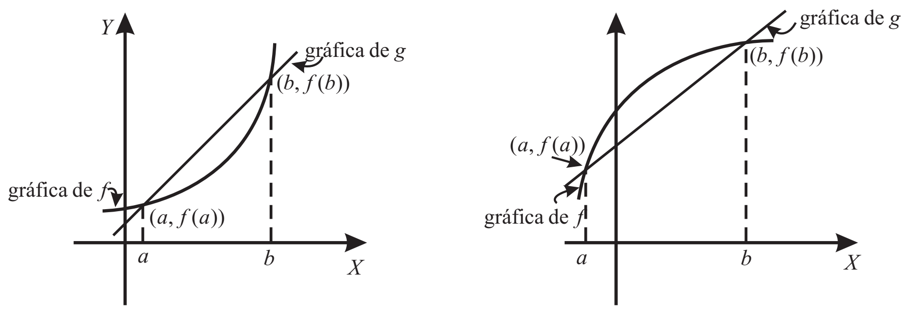


Figura 3.40

(Análogos casos se puede observar cuando la función es decreciente).

Sea $g(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$. La gráfica de $g(x)$ es la recta que pasa por $(a,\, f(a))$ y $(b\,, f(b))$. La diferencia que hay entre los casos a) y b) es que:

$$g(x) \geq f(x) \ \ \forall x \in [a,\, b], \ \text{ en el caso a) y}$$

$$g(x) \leq f(x) \ \ \forall x \in [a,\, b], \ \text{ en el caso b).}$$

Estas condiciones se pueden llevar a las siguientes expresiones:

$$g(x) \geq f(x)\ \forall x \in [a,\, b] \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \geq f(x)\ \forall x \in [a,\, b].$$

$$\therefore\ g(x) \geq f(x)\,\forall x \in [a,\, b] \Leftrightarrow \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\forall x \in (a,\, b)\right]. \tag{3.14}$$

También:

$$g(x) \leq f(x)\,\forall x \in [a,\, b] \Leftrightarrow \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right]. \tag{3.15}$$

A las funciones como f que cumplen en I la propiedad (3.14) para cualesquiera puntos $a,\, b \in I$, las llamamos funciones convexas en I. Para precisar:

Definición 3.6.1 Una función f es **convexa** en el intervalo I si dados $a,\, b \in I$, con $a < b$, se tiene:

$$\forall x \in (a,\, b),\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ejemplos:

1. Sean $f(x) = x^2$ y $I = (0, 1)$. La función f es convexa en I, ya que si $a, b \in I$, con $a < b$ y $x \in (a, b)$, entonces

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a \leq b + a = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Por lo tanto f es convexa en I. La gráfica de f es:

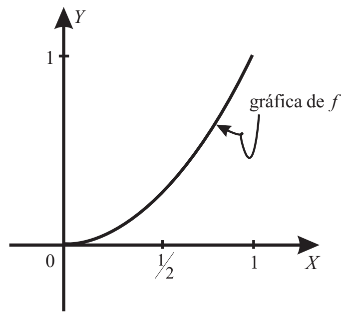


Figura 3.41

2. Sean $f(x) = |x|$ e $I = [-1, 1]$. La función f es convexa en $[-1, 1]$ (ver ejercicio 1). Note usted que f no es creciente en $[-1, 1]$ y que no es derivable en 0. Esto ejemplifica el hecho de que la convexidad no es una propiedad exclusiva de funciones crecientes o derivables.

A las funciones como f que cumplen en I la propiedad (3.15) para cualesquiera puntos $a, b \in I$, las llamaremos funciones cóncavas en I. Más formalmente tenemos:

Definición 3.6.2 Una función f es **cóncava** en el intervalo I si dados $a, b \in I$, con $a < b$, se tiene:

$$\forall x \in (a, b), \ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ejemplo: Sea $f(x) = x^3$, $I = (-1, 0)$. La función f es cóncava en I, ya que si $a, b \in I$, con $a < b$ y $x \in (a, b)$, entonces

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^3 - a^3}{b - a} = b^2 + ab + a^2 \leq x^2 + ax + a^2 = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(en la desigualdad se usa que a, b y x son negativos).

Observaciones:

1. Una función f es cóncava en I si y sólo si $(-f)$ es una función convexa en I (ver ejercicio 2).

2. En algunos textos a las funciones convexas les llaman funciones *cóncavas hacia arriba* y a las funciones cóncavas les llaman funciones *cóncavas hacia abajo.*

Ahora trabajaremos las propiedades anteriores para funciones derivables. Aceptamos que esta restricción es una pérdida de generalidad, pero ... algo es algo. Comencemos demostrando un teorema que caracteriza la convexidad de una función derivable a partir de la monotonía de su función derivada. Para esto probemos el lema siguiente.

Lema 3.6.1 *Si f es derivable en un intervalo I, f' es creciente en I y $a,\, b \in I$, son tales que $a < b$ y $f(a) = f(b)$, entonces*

$$\forall x \in (a,\, b) : f(x) \leq f(a).$$

Demostración: Como f es derivable en I, es continua en $[a,\, b]$ y por ende, alcanza su máximo en $[a,\, b]$. Si f alcanza su máximo en a o en b, el resultado es claro. Veamos que no puede ser de otro modo. Si f no alcanza su valor máximo en a o en b, existe $x_1 \in (a,\, b)$ tal que f alcanza su valor máximo en x_1. Así, por el Teorema 3.4.2, $f'(x_1) = 0$, $x_1 > a$ y $f(x_1) > f(a)$. Por el Teorema del valor medio, existe $x_2 \in (a,\, x_1)$ tal que

$$f'(x_2) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a}.$$

Por lo tanto $f'(x_2) > 0 > f'(x_1)$ pero $x_2 < x_1$ y esto contradice el que f' sea creciente. ■

Teorema 3.6.2 *Si f es derivable en I, entonces f es convexa en I si y sólo si f' es creciente en I.*

Demostración: Supongamos primero que f es convexa en I. Sean $a, b \in I$ tales que $a < b$. Como f es convexa en I,

$$\forall x \in (a, b) : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero, por el ejercicio 3, página 257,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Entonces:

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y

$$f'(b) = \lim_{x \to b^+} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Así que $f'(a) \leq f'(b)$. Así pues, f' es creciente.

Inversamente, supongamos que f' es creciente en I.
Sean a, $b \in I$. Definimos

$$T(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Como f' y T' difieren sólo por una constante, entonces T' es creciente. Además

$$T(a) = f(a) = T(b)$$

y podemos aplicar el lema anterior a la función T para concluir que

$$T(x) \leq T(a)$$

para toda $x \in (a, b)$.
Por lo tanto

$$\forall x \in (a, b) : f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = T(x) \leq T(a) = f(a)$$

y entonces

$$\forall x \in (a, b) : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

es decir, f es convexa en I. ■

Como el lector seguramente ya sospecha, se vale el siguiente resultado.

Teorema 3.6.3 *Si f es derivable en el intervalo I, entonces f es cóncava en I si y sólo si f' es decreciente en I.*

Demostración: Ejercicio 4, página 257. ■

Si existe f'' en I, tenemos los siguientes resultados:

Teorema 3.6.4 *Si $f''(x) > 0$, para cada $x \in I$, entonces f es convexa en I.*

Demostración: Si para toda $x \in I$, $f''(x) > 0$, entonces f' es creciente en I y por el Teorema 3.22, f es convexa en I. ■

Teorema 3.6.5 *Si para cada $x \in I$, $f''(x) < 0$, entonces f es cóncava en I.*

Demostración: Si para cada $x \in I$, $f''(x) < 0$, entonces f' es decreciente en I y por el Teorema 3.23, f es cóncava en I. ■

Sabemos que $f(x_0)$ es un máximo local de f si f es creciente "antes" de x_0 y decreciente "después" de x_0 (ver ejercicio 22, página 217 y Definición 3.5.1) y que algo análogo sucede en los mínimos locales. Ahora estamos interesados en los puntos x_0 en donde una función es cóncava "antes" de x_0 y convexa "después" de x_0 o viceversa.

Definición 3.6.3 Si f está definida cerca del punto x_0, diremos que x_0 es un **punto de inflexión** de f si se cumple alguna de las dos proposiciones siguientes:

i) Existen $a, b \in R$ tales que $x_0 \in (a, b)$ y f es convexa en (a, x_0) y cóncava en (x_0, b) (ver la parte a) de la Figura 3.42).

ii) Existen $a, b \in R$ tales que $x_0 \in (a, b)$ y f es cóncava en (a, x_0) y convexa en (x_0, b) (ver la parte b) de la Figura 3.42).

De esta definición y de los teoremas 3.6.2-3.6.5, se deducen fácilmente los siguientes teoremas.

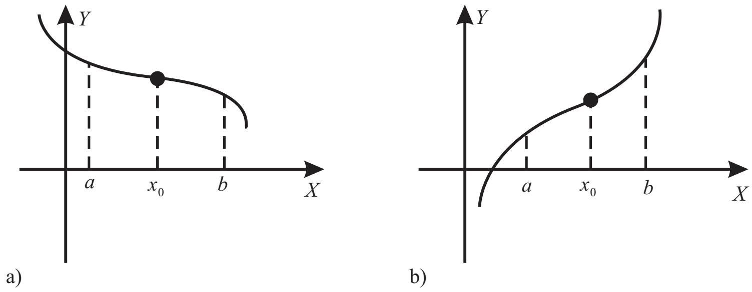


Figura 3.42

Teorema 3.6.6 *Si f es una función definida cerca de un número real x_0 y existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $x_0 \in (a, b)$, f es derivable en $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ y una de las siguientes proposiciones se cumple:*

a) f' es creciente en (a, x_0) y decreciente en (x_0, b), o

b) f' es decreciente en (a, x_0) y creciente en (x_0, b), entonces x_0 es un punto de inflexión de f (ver ejercicio 10).

Teorema 3.6.7 *Si f es una función definida cerca de un número real x_0 y existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $x_0 \in (a, b)$, f'' existe en $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ y una de las siguientes proposiciones se cumple:*

$$\begin{array}{lllll} a) & (\forall x \in (a, x_0) : f''(x) > 0) & y & (\forall x \in (x_0, b) : f''(x) < 0)\,, & o \\ b) & (\forall x \in (a, x_0) : f''(x) < 0) & y & (\forall x \in (x_0, b) : f''(x) > 0)\,, & \end{array}$$

entonces x_0 es un punto de inflexión de f (ver ejercicio 11).

En palabras coloquiales, este teorema dice que si en x_0 cambia el signo de la segunda derivada, entonces x_0 es un punto de inflexión de f. De aquí no se deduce que si x_0 es un punto de inflexión de f, entonces $f''(x_0) = 0$, ya que puede ni siquiera existir $f''(x_0)$ (ver ejercicio 8). Pero si x_0 es un punto de inflexión de f y $f''(x_0)$ existe, entonces, efectivamente, $f''(x_0) = 0$, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 3.6.8 *Si x_0 es un punto de inflexión de f y si $f''(x_0)$ existe, entonces $f''(x_0) = 0$.*

Demostración: Como x_0 es un punto de inflexión de f entonces tenemos i) o ii) de la Definición 3.6.3. Si pasa i), f es convexa en $(a,\, x_0)$ y cóncava

en (x_0, b) para algunos $a, b \in \mathbb{R}$. Podemos suponer que f es derivable en (a, b) (porque para que exista $f''(x_0)$, f' debe estar definida en una vecindad de x_0). Así que f' es creciente en (a, x_0), decreciente en (x_0, b) y continua en x_0. Por consiguiente $f'(x_0)$ es un máximo de f' en (a, b), con lo que $f''(x_0) = 0$.
Si pasa ii), se procede análogamente. ■

Este teorema nos dice que los puntos x en los que $f''(x) = 0$ son buenos candidatos a ser puntos de inflexión de f. Sin embargo, existen funciones f para las que $f''(x_0) = 0$ en algún x_0 y este punto no es punto de inflexión de f. Por ejemplo si $f(x) = x^4$ y $x_0 = 0$ (ver ejercicio 7). Más aún; puede suceder que para una cierta función f, $f''(x_0)$ no exista y sin embargo x_0 sea punto de inflexión de f (ver ejercicio 8).

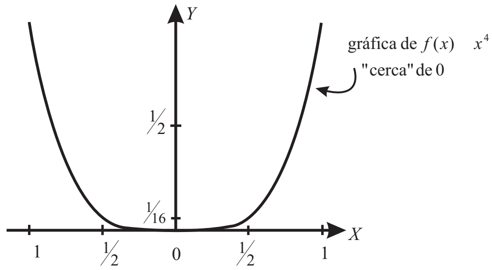


Figura 3.43

Con todo lo anterior obtenemos un procedimiento para graficar funciones. Dada una función f, hay que determinar:

1. Si f es par, impar o periódica. En los dos primeros casos basta estudiar la función para $x \geq 0$; si f es periódica, basta estudiar la función en un intervalo de longitud igual al período de f.

2. Determinar los puntos en donde la función f no está definida y si está definida f cerca de dichos puntos, estudiar el comportamiento de f cerca de ellos.

3. Determinar el comportamiento de f para $|x|$ muy grande (es decir, investigar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$). Estudiar las asíntotas, si las hay.

4. Hallar los puntos críticos de f y los intervalos en donde f es creciente o decreciente (si f es derivable, basta estudiar el signo de f'). Hallar los máximos y mínimos locales.

5. Determinar los intervalos en los que f es cóncava y los intervalos en los que f es convexa y hallar los puntos de inflexión.

6. Si es posible, hallar los puntos x en los que $f(x) = 0$ y calcular las imágenes de algunos puntos clave: el cero, los máximos y mínimos locales y los puntos de inflexión.

Ejemplos:

1. Graficar la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.
   No es difícil percatarse de que f no es par, ni impar, ni periódica.
   f no está definida en 1, pero

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = +\infty.$$

   En cambio $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ porque $\lim_{x \to 1^-} x^2 - 2x + 2 = 1 > 0$ y

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x - 1} = -\infty.$$

Para examinar el comportamiento de f cuando $|x|$ se hace grande, escribimos:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1}.$$

De aquí se obtiene que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ y que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
También se observa que la recta $y = x - 1$ es una asíntota de f pues

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x - 1} = 0$$

e incluso

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x - 1} = 0.$$

Como $f(x) - (x - 1) > 0$ si y sólo si $\dfrac{1}{x - 1} > 0$ si y sólo si $x > 1$, la gráfica de f está por arriba de la recta $y = x - 1$ si $x > 1$ y por debajo de la recta $y = x - 1$ si $x < 1$.

Para hallar los puntos críticos de f, derivemos:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(2x-2)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Por lo tanto $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $x = 2$. Los puntos críticos de f son 0 y 2. Estudiemos el signo de f':

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x(x-2) > 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [(x > 0 \ \wedge \ x-2 > 0) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ x-2 < 0)] \ \wedge \ x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow [x > 2 \ \vee \ x < 0] \ \wedge \ x \neq 1 \Leftrightarrow [x > 2 \ \vee \ x > 0] \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty,\, 0) \cup (2,\, \infty). \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow [x \neq 1 \ \wedge \ x \in (0,\, 2)] \Leftrightarrow x \in (0,\, 1) \cup (1,\, 2).$$

De aquí, f es creciente en los intervalos $(-\infty,\, 0)$ y $(2,\, \infty)$, mientras que f es decreciente en los intervalos $(0,\, 1)$ y $(1,\, 2)$. Se colige entonces que $f(2)$ es un mínimo local y $f(0)$ es un máximo local de f. Estos hechos pudieron haberse deducido a partir de la segunda derivada, como ustedes recordarán; veamos como:

$$f''(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3},$$

así que

$$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow f(0) \text{ es un máximo local de } f$$

$$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow f(2) \text{ es un mínimo local de } f$$

(por el Teorema 3.5.2).

Ya que tenemos la segunda derivada, usémosla para estudiar la concavidad y la convexidad de f:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Así pues, f es convexa en $(1,\, \infty)$. Por supuesto, será cóncava en $(-\infty,\, 1)$. Entonces el único punto de inflexión de f es $x = 1$.

Los resultados de toda esta investigación, para mayor comodidad, pueden ser incluidos en una tabla como la siguiente:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	no existe
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	no existe
$f(x)$	$\nearrow$ Cónc.	-2, máx. L.	$\searrow$ Cónc	N.D.; P.I

x	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$ Conv.	2 mín. L.	$\nearrow$ Conv.

Donde:
C. Cónc significa $\to$ crece cóncavamente;
máx. L. $\to$ máximo local; $\searrow$ Cónc $\to$ decrece cóncavamente;
N.D. $\to$ no definida; P.I. $\to$ punto de inflexión;
$\searrow$ Conv $\to$ decrece convexamente; mín. L. $\to$ mínimo local y
$\nearrow$ Conv. $\to$ crece convexamente.

Con estos resultados y tomando en cuenta las asíntotas, construimos la gráfica de la función (Figura 3.44).

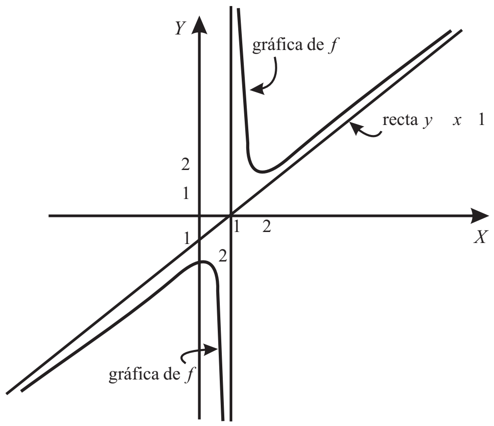


Figura 3.44

2. Graficar $f(x) = 12 + 2x^2 - x^4$.

Como f es par, basta estudiar su gráfica para $x \geq 0$. En todos estos puntos f está definida. Por otro lado,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^4\left(\frac{12}{x^4} + \frac{2}{x^2} - 1\right) = -\infty.$$

Hallemos los puntos críticos de f en $[0, \infty)$.

$$[f''(x) = 0 \ \wedge \ x \geq 0] \Leftrightarrow 4x - 4x^3 = 0 \ \wedge \ x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee [(1 - x^2) = 0 \ \wedge \ x \geq 0] \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 1.$$

0 y 1 son, entonces los puntos críticos de f en $[0, \infty)$. Ahora bien:

$$[f'(x) > 0 \ \wedge \ x \geq 0] \Leftrightarrow [4x(1 - x^2) > 0 \ \wedge \ x \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow [x > 0 \ \wedge \ 1 - x^2 > 0] \Leftrightarrow [x > 0 \ \wedge \ (-1 < x < 1)]$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Por lo tanto, f es creciente en $(0, 1)$ y será entonces decreciente en $(1, \infty)$. Así, $f(1)$ es un máximo local.

$$[f''(x) = 4 - 12x^2 > 0 \ \wedge \ x \geq 0] \Leftrightarrow [1 - 3x^2 > 0 \ \wedge \ x \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow (1 > 3x^2 \ \wedge \ x \geq 0) \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}} \ \wedge \ x \geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Entonces f es convexa en $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y será cóncava en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$. Así, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ es un punto de inflexión.

Resumamos en la tabla siguiente:

x	0	$(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	0	+	+	+	0	−
$f''(x)$	+	+	0	−	−	−
$f(x)$	12, mín.L.	$\nearrow$ Conv	$\frac{113}{9}$, P.I	$\nearrow$ Cóc.	13, máx. L.	$\searrow$ Cónc.

Por último, veamos en qué puntos f se anula:

$$[f(x) = 0 \ \wedge \ x \geq 0] \Leftrightarrow [12 + 2x^2 - x^4 = 0 \ \wedge \ x \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2 \frac{-2 \pm \sqrt{4+48}}{-2} \ \wedge \ x \geq 0\right]$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 1 + \sqrt{13} \ \wedge \ x \geq 0) \Leftrightarrow \left(x = \sqrt{1+\sqrt{13}} \approx 2.15\right).$$

La gráfica de f, para $x \geq 0$, se señala a continuación con la línea gruesa continua (ver Figura 3.45).

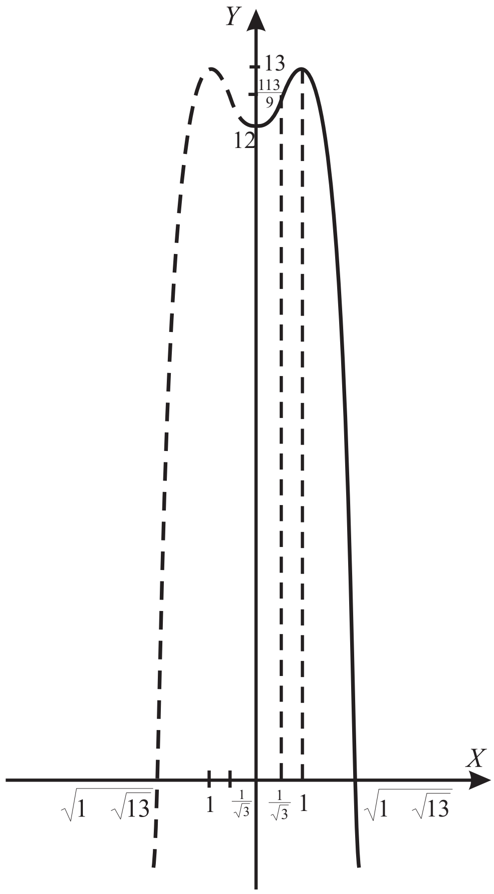


Figura 3.45

Por simetría con respecto al eje Y (pues f es par), hemos podido "completar" el dibujo de la gráfica de f. La parte de ésta para $x < 0$, se ha trazado con línea punteada.

3. Vamos ahora a graficar la función $f(x) = \cos x$:
   Como para toda $x \in \mathbb{R}$ $\cos x = \cos(-x)$, f es una fución par, por lo que es suficiente estudiarla para $x \geq 0$. ¡Ah!... pero $\cos x$ es una función periódica, de período 2π, así que basta estudiarla en el intervalo $[0,\, 2\pi]$.

   En $[0,\, 2\pi]$, f está definida y es continua.

   Ahora bien, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ y por lo tanto

   $$f'(x) = 0 \ \wedge \ x \in [0,\, 2\pi] \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \pi \ \vee \ x = 2\pi.$$

   Estos son puntos críticos de f. Como, para toda $x \in (0, \pi)$, $\operatorname{sen} x \neq 0$ y es continua en $(0,\, \pi)$,

   $$\forall x \in (0,\, \pi) : \ \operatorname{sen} x > 0 \vee \forall x \in (0,\, \pi) : \ \operatorname{sen} x < 0$$

   (ver ejercicio 19, pág 19). Como $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} > 0$, $\operatorname{sen} x$ es entonces positiva en $(0,\, \pi)$. Del mismo modo se demuestra que $\operatorname{sen} x$ es negativa en $(\pi,\, 2\pi)$. Así:

   $\forall x \in (0,\, \pi),\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente en $(0,\, \pi)$ (estrictamente)

   $\forall x \in (\pi,\, 2\pi),\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en $(\pi,\, 2\pi)$ (estrictamente).

   También se concluye que $f(0)$ es un máximo local, $f(\pi)$ es un mínimo local y $f(2\pi)$ es un máximo local de f en $[0,\, 2\pi]$.

Pasemos a la segunda derivada. Sabemos que $f''(x) = -\cos x$. Pero:

$$-\cos x > 0 \ \Leftrightarrow \ \cos x < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2},\, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Por eso f es convexa en $\left(\frac{\pi}{2},\, \frac{3\pi}{2}\right)$ y cóncava en $\left(0,\, \frac{\pi}{2}\right)$ y en $\left(\frac{3\pi}{2},\, 2\pi\right)$. Los puntos $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ son los puntos de inflexión de f.

He aquí la famosísima gráfica de $f(x) = \cos x$ (lo que hicimos para $[0,\, 2\pi]$, se va repite y repite):

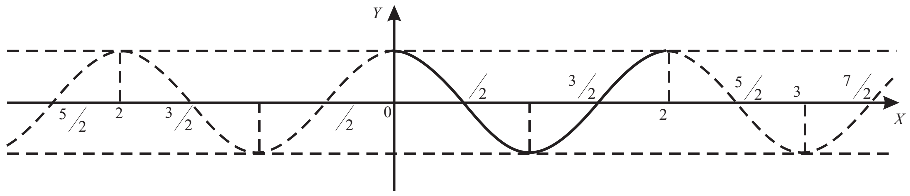


Figura 3.46

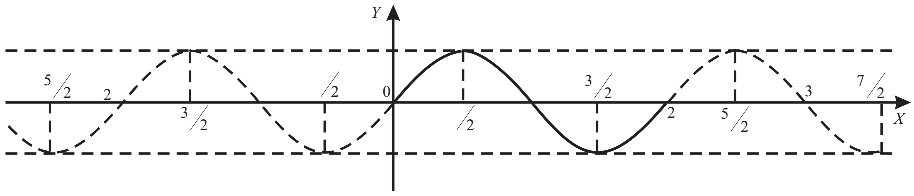


Figura 3.47

4. He aquí la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$: –Figura 3.47–

   Se parece mucho a la gráfica de $\cos x$ ¿verdad? De hecho es la gráfica de $y = \cos x$ pero trasladada una distancia de $\frac{\pi}{2}$ en la dirección del eje positivo X. Esto se justifica por el hecho de que para toda $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Pero si se hace un análisis de la gráfica de $\operatorname{sen} x$ con los resultados de esta sección, comprobaremos que $\operatorname{sen} x$ es estrictamente creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y en $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ porque su derivada, $\cos x$, es positiva en esos intervalos; en cambio es estrictamente decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ pues $\cos x$ es negativa allí. La función $\operatorname{sen} x$ es cóncava en $(0, \pi)$ y convexa en $(\pi, 2\pi)$ ya que

   $$f''(x) = -\operatorname{sen} x > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi, 2\pi).$$

   Los puntos de inflexión son π y nada más (¡claro!, en el intervalo $[0, 2\pi]$). Como $\operatorname{sen} x$ es periódica de período 2π, bastó hacer este análisis en $[0, 2\pi]$ para tener toda la gráfica.

5. Veamos cómo es la tangente. Sea $g(x) = \tan x$
   Como $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, g es periódica de período 2π. Más aún,

   $$\tan(x + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x.$$

Por consiguiente, $\tan x$ es periódica de período π, así que restringiremos nuestro estudio al intervalo $[0, \pi]$.

Para comenzar, g no está definida en $\pi/2$ pues $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Pero

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \infty,$$

pues para toda $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{sen} x > 0$ y $\cos x > 0$. También

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

pues para cada $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\operatorname{sen} x > 0$ y $\cos x < 0$.

Analicemos la primera derivada:

$$\tan' x = \sec^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

es siempre positiva, lo que implica que g es estrictamente creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ y en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ y no hay puntos críticos.

Por otro lado,

$$\tan'' x = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \text{ para cada } x \in (0, \pi) - \{\pi/2\},$$

lo que implica que $\tan x$ es cóncava en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y convexa en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\frac{\pi}{2}$ es un punto de inflexión.

La gráfica de $g(x) = \tan x$, queda:

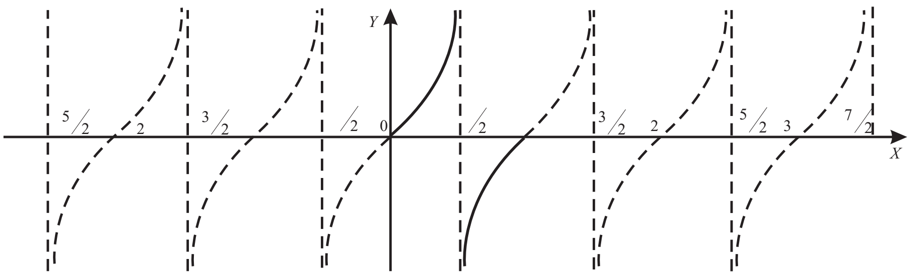


Figura 3.48

6. Sea $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.
La función f es par, así que sólo la estudiaremos en $\mathbb{R}_+ \cup \{0\} = [0, \infty)$. En dicho intervalo f es continua y

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = \infty.$$

Como $f(x) = (x^2-1)^2$, $f'(x) = 4x(x^2-1)$. Por eso, si $x \geq 0$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \ \vee \ x^2 = 1) \Leftrightarrow (x = 0 \ \vee \ x = 1).$$

Los números reales 0 y 1 son entonces los puntos críticos de f en $[0, \infty)$.

$f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \forall x \in (0,\, 1) :\ f'(x) < 0$ (pues f' es continua en $(0,\, 1)$)

$f'(2) > 0 \Rightarrow \forall x \in (1,\, \infty) :\ f'(x) > 0$ (pues f' es continua en $(1,\, \infty)$).

Por consiguiente, f es estrictamente creciente en $(1,\, \infty)$ y estrictamente decreciente en $(0,\, 1)$. Así, $f(0)$ es máximo local y $f(1)$ es mínimo local.

Pasemos a la segunda derivada: $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2-1)$.
Así que, si $x \geq 0$,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{3} - 1\right) < 0.$$

Todo esto implica que

$$\forall x \in \left(0,\, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) : f''(x) > 0 \ \left(\text{pues } f'' \text{ es continua en } \left(0,\, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

$$f''(1) = 4 \cdot 2 > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\forall x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right) : f''(x) > 0 \ \left(\text{pues } f'' \text{ es continua en } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)\right).$$

Así, f es cóncava en $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y es convexa en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$. El número real $\frac{1}{\sqrt{3}}$ es un punto de inflexión de f.

La gráfica que obtenemos es:

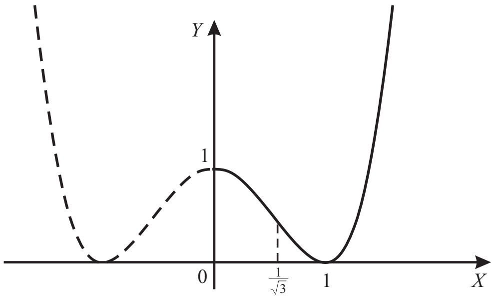


Figura 3.49

7. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.
   La función f está definida, es continua en $\mathbb{R}$ y se puede escribir como:
   $$f(x) = x^3 \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}.$$
   Por consiguiente,
   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$
   Más aún,
   $$\begin{aligned}
   \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) &= \lim_{x\to\infty} x \left(\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} - 1\right) \\
   &= \lim_{x\to\infty} x \left(\frac{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} - 1}{\left(\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} + 1}\right) \\
   &= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}}{\left(\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} + 1} = 0.
   \end{aligned}$$

Por lo tanto, la recta $y = x$ es asíntota a la gráfica de f. Se puede demostrar también que

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0.$$

Ahora bien,

$$1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} < 1 \Leftrightarrow (x < 0 \vee x > \frac{2}{3}).$$

Por eso, $f(x) - x > 0$ para $x < \frac{2}{3}$ y $f(x) - x < 0$ para $x > \frac{2}{3}$. Para convencerse de estas afirmaciones, use la expresión: $f(x) - x = x\left(\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} - 1\right)$.

Entonces la gráfica de f se va acercando a la recta $y = x$, pero por debajo de ella cuando x tiende a ∞ y por arriba de ella cuando x tiende a $-\infty$.

Por otro lado,

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}} = \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{((x-1)^2(x+2))^2}} =$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}},$$

y esta expresión no está definida para $x = 1$ ni para $x = -2$.

El único punto crítico es -1. También se tiene:

a) $x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en $(1, \infty)$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \infty$.

b) $-1 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente en $(-1, 1)$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty$.

c) $-2 < x < -1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en $(-2, -1)$ y $\lim\limits_{x \to -2^+} f'(x) = \infty$.

d) $x < -2 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en $(-\infty, -2)$ y $\lim\limits_{x \to -2^-} f'(x) = \infty$.

De a), c) y d) se obtiene que f es creciente en $(-\infty, -1) \cup [1, \infty)$ (recordar que f es continua en 1 y en -2 y por eso f es creciente en $[1, \infty)$, en $(-\infty, -2]$ y en $[-2, -1)$).

La función f es decreciente en $[-1, 1]$. De todo esto se obtiene que $f(-1)$ es un máximo local y $f(1)$ es un mínimo local (aunque f' no exista en 1).

Como $\lim\limits_{x\to -2} f'(x) = \infty$, en -2 hay "tangente vertical".

Como $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$ para $x \neq 1$ y para $x \neq -2$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} - (x+1)\left(\frac{2(x-1)(x+2)+(x+2)^2}{3\sqrt[3]{((x-1)(x-2)^2)^2}}\right)}{\sqrt[3]{((x-1)(x-2)^2)^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2} - (x-1)\left(\frac{x(x+2)}{\sqrt[3]{((x-1)(x-2)^2)^2}}\right)}{\sqrt[3]{((x-1)(x-2)^2)^2}} \\ &= \frac{-2(x+2)}{\sqrt[3]{((x-1)(x+2)^2)^4}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Leftrightarrow (-2(x+2) > 0 \wedge x \neq -2 \wedge n \neq +1) \\ &\Leftrightarrow (x+2 < 0 \wedge x \neq -2 \wedge n \neq +1) \Leftrightarrow x < -2. \end{aligned}$$

Entonces f es convexa en $(-\infty, -2)$ y es cóncava en $(-2, 1)$ y en $(1, \infty)$. Así,

$x = -2$ es el único punto de inflexión.

Finalmente, $f(1) = 0$, $f(-1) = \sqrt[3]{4}$, $f(-2) = 0$, $f(0) = \sqrt[3]{2}$, $f(2) = \sqrt[3]{4}$ –Figura 3.50–.

8. La función $f(x) = e^{-x^2}$ (curva de probabilidad) es par. Además, para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ y

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

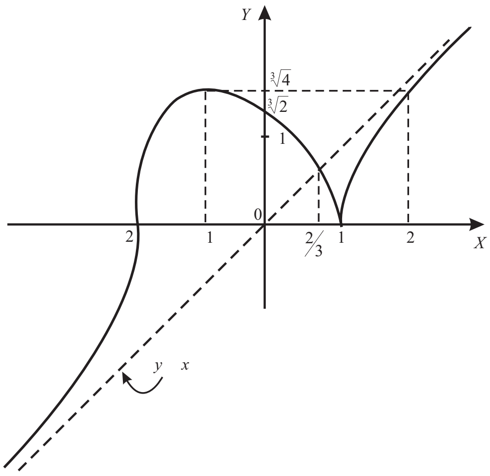


Figura 3.50

$f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$, así que $f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$ y:
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$
Como $f''(0) = -2 < 0$, $f(0)$ es un máximo local.

Puede comprobar el alumno que los puntos de inflexión de f son $\sqrt{\frac{1}{2}}$ y -$\sqrt{\frac{1}{2}}$.

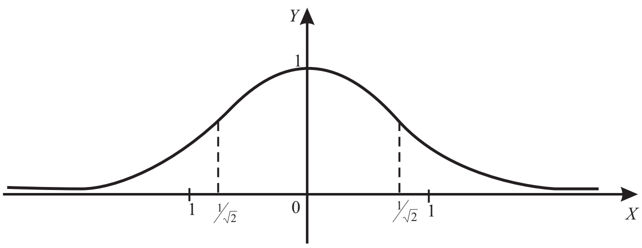


Figura 3.51

9. La derivada de $f(x) = x^2\, e^{-x}$ es:

$$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$$

Como para cada $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, se tiene que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 2)\,.$$

También se tiene:

$$f''(x) = e^{-x}(x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 + \sqrt{2})).$$

En fin: se pide al alumno que compruebe los datos asentados en la tabla que sigue:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2 - \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{2}$	$(2 - \sqrt{2}, 2)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$ Conv	0 mín L.	$\nearrow$ Conv	P.I.	$\nearrow$ Conc

x	2	$(2, 2 + \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{2}$	$(2 + \sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$4\,e^{-1}$ máx. L.	$\searrow$ Conc.	P.I.	$\searrow$ Conv

Otros datos útiles son:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty.$$

Para calcular $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, calculemos primero $\lim\limits_{x \to \infty} log\, f(x)$:

$$log\, f(x) = log\left(\frac{x^2}{e^x}\right) = log\, x^2 - log\, e^x = 2log\, x - x$$

Así:

$$log\, \frac{f(x)}{x} = 2\frac{log\, x}{x} - 1.$$

Pero $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{log\, x}{x} = 0$ (esto se probó en la página 210), por lo cual:

$$\lim_{x \to \infty} \left(2\frac{log\, x}{x} - 1\right) = -1$$

y con ello,

$$\lim_{x\to\infty} log\, f(x) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{log\, f(x)}{x}\right) = -\infty.$$

Como e^x es continua,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{log\, f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} log\, f(x)} = 0$$

Como para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, el eje X es una asíntota a la gráfica de f.

En fin, la gráfica es la siguiente, tomando en cuenta que $f(-1) = e$ (ver Figura 3.52).

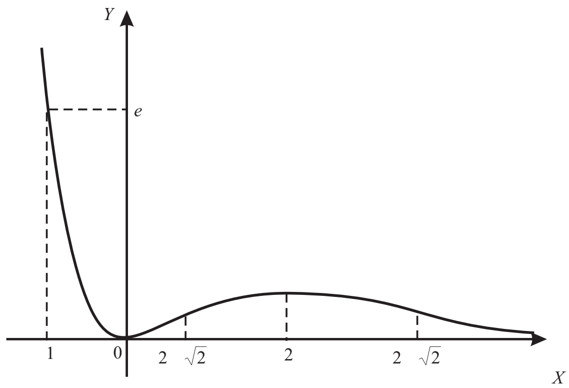


Figura 3.52

Como mencionamos cuando comenzamos la Sección 3 de este Capítulo (página 204), el conocimiento de la derivada de una función f, nos da mucha información acerca de f. Por lo que hemos desarrollado a partir de entonces, sabemos ya que:

a). Si $f'(x) = 0$ en un intervalo abierto I, f es constante en I (página 209).

b). Si $f'(x) > 0$ en un intervalo abierto I, f es estrictamente creciente en I (página 210).

c). Si $f'(x) < 0$ en un intervalo abierto I, f es estrictamnete decreciente en I (página 210).

d). Los resultados enunciados en a), b) y c), se pueden extender a intervalos cerrados I si f es continua en I (problemas 20 y 21 de la página 217).

e). Si f es continua en x_0 y $f'(x) > 0$ "antes que x_0" y $f'(x) < 0$ "después de x_0", entonces $f(x_0)$ es un máximo local de f (problema 22 de la página 217).

f). Si f es continua en x_0 y $f'(x) < 0$ "antes que x_0" y $f'(x) > 0$ "después de x_0", entonces $f(x_0)$ es un mínimo local de f (problema 23 de la página 217).

g). Si f' es creciente en un intervalo I entonces f es convexa en I (Teorema 3.22, página 236).

h). Si f' es decreciente en un intervalo I entonces f es cóncava en I (Teorema 3.6.3, página 238).

i). Si f' es creciente "antes que x_0" y f' es decreciente "después de x_0", x_0 es un punto de inflexión de f (Teorema 3.6.6, página 239).

j). Si f' es decreciente "antes que x_0" y f' es creciente "después de x_0", x_0 es también un punto de inflexión de f (Teorema 3.6.6, página 239).

Con este conjunto de resultados en mente, viendo la gráfica de la derivada de una función, podemos darnos una idea (cualitativa) de la gráfica de la función. Por ejemplo, si la gráfica de f' es como la curva superior de la Figura 353, la gráfica de f es de la forma de la curva inferior en la misma figura.

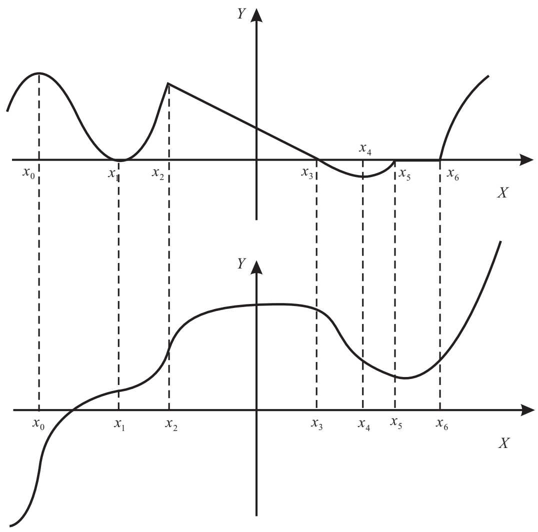


Figura 3.53

Ejercicios 5

1. Si $f(x) = |x|$, demostrar que f es convexa en $[-1, 1]$.
2. Demostrar que f es cóncava en I si y sólo si $-f$ es convexa en I.
3. Demostrar que f es convexa en I si y sólo si:
$$\forall a,\, b \in I : a < b \Rightarrow \left[\frac{f(b) - f(x)}{b - x} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \forall x \in (a,\, b)\right].$$
4. Demostrar que si f es derivable en I, entonces f es cóncava en I si y sólo si f' es decreciente en I.
5. Demostrar que el recíproco del Teorema 3.6.4 es falso.
6. Demostrar que el recíproco del Teorema 3.6.5 es falso.

7. Dar un ejemplo de una función f y un punto x_0 tales que: $f''(x_0) = 0$ pero x_0 no sea punto de inflexión de f.

8. Dar un ejemplo de una función f y un punto x_0 tales que: f no tenga segunda derivada en x_0, pero x_0 sea punto de inflexión de f.

9. Hallar una función cóncava y convexa en algún intervalo I.

10. Demuestre el Teorema 3.6.6.

11. Demuestre esta especie de "criterio de la segunda derivada para puntos de inflexión", es decir, el Teorema 3.6.7.

12. Demuestre que si

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x > 0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0, \\ x^2 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

entonces 0 es un punto de inflexión de f.

13. Demuestre que si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$, entonces f tiene exactamente un punto de inflexión.

14. ¿A que función del lado derecho corresponde cada derivada del lado izquierdo? (ver Figura 3.54).

15. Halle los intervalos en los que la función $f(x) = 3x^2 - 8x + 12$ es convexa y los intervalos en donde es cóncava. Esboce con ello la gráfica de f.

16. Encuentre los puntos de inflexión de las siguiente funciones:

a) $f(x) = 24x^4 - 32x^3 + 9x^2 + 1$, b) $f(x) = x^3 - x$,

c) $f(x) = (x-1)^4$, d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,

e) $f(x) = \dfrac{1}{e^{x^2}}$, f) $f(x) = x^2 e^{-x}$.

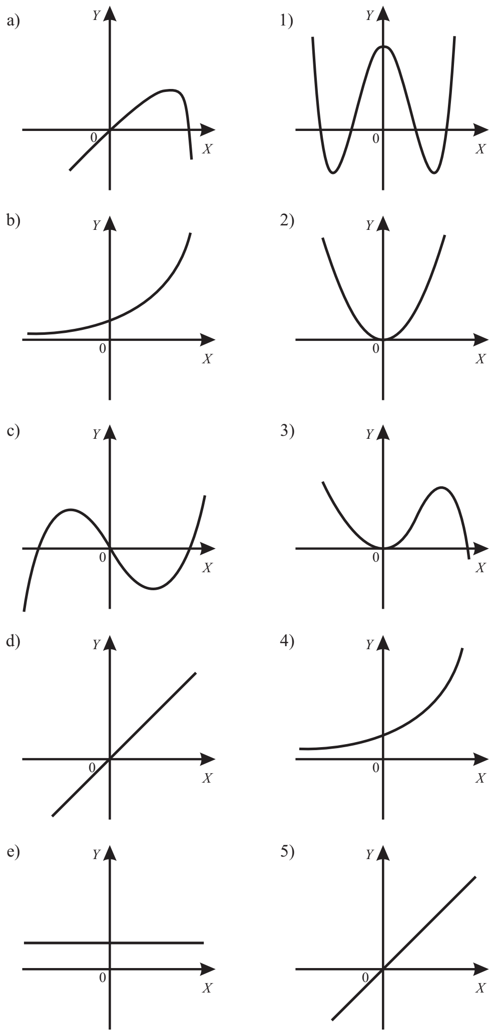


Figura 3.54

17. La siguiente figura –Figura 3.55– muestra la gráfica de la derivada de f. Diga en qué puntos f tiene máximos y mínimos locales y cuáles son puntos de inflexión.

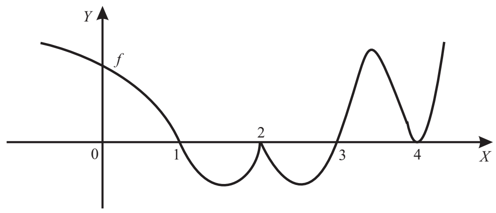


Figura 3.55

18. Haga un dibujo de la gráfica de la función f cuya derivada es la gráfica del ejercicio 15 ("esboce cualitativamente").

19. Encuentre los puntos de inflexión para $f(x) = x^n$, donde $n \in \mathbb{N}$. ¿Cómo depende la respuesta de n?

20. Demuestre que si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$ entonces x_0 es un punto de inflexión de f.

21. Suponga que $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, pero $f''''(x_0) \neq 0$. ¿Es x_0 un punto de inflexión? o ¿es acaso un punto donde f alcanza un valor extremo local?

22. Dé ejemplos que muestren lo que puede ocurrir en x_0 si
$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = f''''(x_0) = 0.$$

23. Dibuje las gráficas de las funciones siguientes, procediendo como se propone en la página 240.

a) $f(x) = \dfrac{x(x-2)}{x-1}$, b) $f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 1$,

c) $g(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, d) $f(x) = x^4 + x^3$,

e) $f(x) = x^4 - x^2$, f) $h(x) = 3x^3 + x^2 + 1$,

g) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, h) $l(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2}$.

24. ¡Sea feliz!

Índice