Cálculo 1,
Febrero — Agosto 2007.
Ejercicios 1

1. Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ que están acotados superiormente, demuestre que $A \cup B$ y $A \cap B$ están acotados superiormente.

2. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ están acotados superiormente y no son vaciós, demuestre que

$$\sup (A \cup B) = \max \{\sup A, \sup B\} .$$

¿Es también cierto que $\sup (A \cap B) = \min \{\sup A, \sup B\}$? Demuéstrelo o de un contraejemplo.

3. Demuestre que $A \subseteq \mathbb{R}$ está acotado si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $A \subseteq [a, b]$.

4. Si A y B están acotados ¿qué se puede decir de $A \setminus B$?

5. "A es acotado superiormente si y sólo si $\mathbb{R} \setminus A$ es acotado inferiormente", ¿es siempre verdadera?

6. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $\sup A = \sup B$ e $\inf A = \inf B$, ¿es cierto que $A = B$?

7. Demuestre que si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son tales que: (i) $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, (ii) $A \cup B = \mathbb{R}$ y (iii) $(\forall x \in A)\,(y \in B \Rightarrow x < y)$, entonces (a) $A \cap B = \emptyset$ y (b) existe un único $\xi \in \mathbb{R}$ que satisface que

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,((x < \xi \Rightarrow x \in A) \;\;\&\;\; (x > \xi \Rightarrow x \in B))\,.$$