

Cálculo 1,  
Febrero — Agosto 2007.  
Ejercicios 2

1. Investigue si los siguientes conjuntos son o no inductivos:

(a)  $A = \{-5\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ ,

(b)  $B = \left\{n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 5\right\}$

(c)  $C = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} > 0\right\}$ ,

(d)  $D = \{x \in \mathbb{R} : -2x - 28 < x^2 + 8x\}$ .

2. Demuestre que si  $A$  y  $B$  son subconjuntos inductivos de números reales, entonces  $A \cap B$  es un conjunto inductivo.

3. Demuestre que:

(a)  $(\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq 2 \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{N}) (1 + r = n))$

(b)  $(\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq 2 \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{N})$

(c)  $(\forall n \in \mathbb{N}) (m \in \mathbb{N} \ \& \ n < m \Rightarrow m - n \in \mathbb{N})$

4. Demuestre que todo subconjunto de  $\mathbb{N}$  no vacío y acotado superiormente tiene un elemento máximo.

5. Demuestre que si  $a \in \mathbb{Q}$  y  $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , entonces  $\{a + b, -b, \frac{1}{b}\} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ .

6. Demuestre que si  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $x < y$ , entonces existe  $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  tal que  $x < r < y$ .

7. Muestre que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

8. Determinar el dominio máximo de cada una de las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = 3x + 5$ ,

(b)  $f(x) = \frac{1}{x-4}$ ,

(c)  $f(x) = \frac{1}{(x-8)(x+5)}$ ,

(d)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x-5}}$

(e)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$

9. ¿Son iguales las funciones  $f, g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{y} \quad g(x) = x + 1?$$

10. Sea  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por

$$f(n) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{si } n \text{ es impar} \\ n, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

¿Es  $f$  una función inyectiva? ¿Por qué?

11. Si  $g \circ f$  es una función inyectiva, ¿qué se puede decir de la inyectividad de  $f$  y de  $g$ ?

12. Definamos  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$  por  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ . ¿Es  $f$  sobreyectiva?

13. Si  $g \circ f$  es una función sobreyectiva, ¿qué se puede decir de la sobreyectividad de  $f$  y de  $g$ ?