Segundo Examen Parcial
Cálculo I
(Marzo - Agosto, 2007)
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH

Nombre completo:____

Correo electrónico:____

Instrucciones: Este examen consta de cinco problemas. De los seis problemas propuestos Usted deberá escoger cinco de ellos. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

(1) Sea $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 + \frac{1}{x}$ para cada $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. ¿Existirá el límite de f cuando x tiene a 1? ¿Cuál será? Si Usted cree que existe y es igual a L, demuestre su afirmación hallando un $\delta > 0$ para cada $\varepsilon > 0$ de modo tal que si $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Solución: No es difícil observar que el límite sí debe existir y que su valor es 2. Ahora para demostrar esta afirmación fijemos $\varepsilon > 0$. Entonces:

$$\left|x^4 + \frac{1}{x} - 2\right| = \left|x^4 - 1 + \frac{1}{x} - 1\right| \leq \left|x^4 - 1\right| + \left|\frac{1}{x} - 1\right|.$$

Si hacemos $\delta_1 = \frac{1}{2}$ y suponemos que $0 < |x-1| < \delta_1$ entonces $x < \frac{3}{2} < 2$ y en consecuencia

$$\left|x^4 - 1\right| = |x-1| \cdot \left|x^3 + x^2 + x + 1\right| < 15 \cdot |x-1|.$$

También si $0 < |x-1| < \delta_1$, entonces $x > \frac{1}{2}$ y en consecuencia

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|1-x|}{|x|} = |x-1| \cdot \frac{1}{x} < 2 \cdot |x-1|.$$

Así, podemos si tomamos $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{30}$, entonces $\left|x^4 - 1\right| < 15 \cdot |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$ y si tomamos $\delta_3 = \frac{\varepsilon}{4}$, entonces $\left|\frac{1}{x} - 1\right| < 2 \cdot |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, si escogemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_3, \delta_3\}$ y si $0 < |x-1| < \delta$, entonces obtenemos que

$$\left|x^4 + \frac{1}{x} - 2\right| \leq \left|x^4 - 1\right| + \left|\frac{1}{x} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto demuestra que

$$\lim_{x \to 1} x^4 + \frac{1}{x} = 2.$$

(2) Sea f una función real. Demuestre que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si y sólo si $\lim_{h\to 0} f(a+h)$ existe. Además concluya de su demostración que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x+h).$$

Solución: Supongamos primero que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y es igual a L; veamos que $\lim_{h\to 0} f(a+h) = L$. Para esto tomemos una suceción arbitraria $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $h_n \neq 0$ para cada $n\in\mathbb{N}$, $a+h_n \in \operatorname{dom}(f)$ para cada $n\in\mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$.

Ahora, es claro que la sucesión $(a+h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que $a+h_n \neq a$ para cada $n\in\mathbb{N}$, $a+h_n\in\operatorname{dom}(f)$ para cada $n\in\mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} a+h_n = a$. Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, entonces tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f(a+h_n) = L.$$

Pero este último límite nos dice que $\lim_{h\to 0} f(a+h) = L$ puesto que tomamos $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arbitraria.

Recíprocamente, si $\lim_{h\to 0} f(a+h) = L'$, veamos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L'.$$

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \neq a$ para cada $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in\operatorname{dom}(f)$ para cada $n\in\mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Defínase $h_n = x_n - a$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Entonces $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de términos distintos de 0 y tal que $h_n\in\operatorname{dom}(f)$ para n suficientemente grande, además $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Como $\lim_{h\to 0} f(a+h) = L'$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(a+h_n) = L'$. Pero $x_n = a+h_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Así

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(a+h_n) = L'.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L'.$$

Obsérvese que se ha establecido que si uno de los límites existe, entonces también el otro existe y que sus valores coinciden.

(3) Supóngase que f y g son funciones reales tales que $\lim_{t\to\infty} g(t) = -\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$. Demuestre que:

$$\lim_{t\to\infty} f\circ g(t) = L.$$

Solución: Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con $t_n\in\operatorname{dom}(f\circ g)$ para cada $n\in\mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Entonces $\lim_{n\to\infty} g(t_n) = -\infty$ puesto que $\lim_{t\to\infty} g(t) = -\infty$. Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f\circ g(t_n) = \lim_{n\to\infty} f(g(t_n)) = L.$$

Esto demuestra que $\lim_{t\to\infty} f\circ g(t) = L$ puesto que la sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es arbitraria.

(4) ¿Existe $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$? ¿Cuál es su valor?

Solución: Primero observemos que para $x \neq 5$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25} &= \frac{(x+11)-4(x-1)}{(x^2-25)\left(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}\right)} \\
&= \frac{-3(x-5)}{(x-5)(x+5)\left(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}\right)} \\
&= \frac{-3}{(x+5)\left(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}\right)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25} &= \lim_{x\to 5} \frac{-3}{(x+5)\left(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}\right)} \\
&= \frac{-3}{\lim_{x\to 5}(x+5)\left(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}\right)} \\
&= -\frac{3}{80}.
\end{aligned}$$

Nótese que en la segunda de las igualdades anteriores estamos usando implícitamente el hecho de que

$$\lim_{x\to 5}(x+5)\left(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}\right) \neq 0.$$

(5) Supóngase que $f:[0,1]\to[0,1]$ es una función continua en $[0,1]$. Demuestre que $f(x)=x$ para algún $x\in[0,1]$.

Solución: Definamos $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ por $h(x)=x-f(x)$, para todo $x\in[0,1]$. Entonces h es una función continua en el intervalo $[0,1]$. Además $h(0)\leq 0$ y $h(1)\geq 0$.

Si ocurre que $h(0)=0$ o $h(1)=0$, entonces se sigue que $f(0)=0$ o $f(1)=1$, respectivamente. Así el punto x que buscamos sería 0 o 1, según sea el caso.

Supongamos entonces que $h(0)<0<h(1)$. Como h es continua en $[0,1]$, el Teorema del Valor Intermedio garantiza que $h(x)=0$ para algún $x\in(0,1)$; es decir, $f(x)=x$ para algún $x\in(0,1)$, como se quería demostrar.

(6) Sea $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ un polinomio de grado impar (es decir, n es un natural impar). Demuestre que $p(x)$ tiene una raíz; es decir, que existe $x_0\in\mathbb{R}$ tal que $p(x_0)=0$.

Solución: Empecemos por escribir el polinomio así:

$$p(x)=x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_{n-2}}{x^2}+\cdots+\frac{a_2}{x^{n-2}}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right),$$

para $x\neq 0$. Entonces es fácil observar que

$$\lim_{x\to-\infty} p(x)=-\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} p(x)=\infty.$$

Así que podemos elegir $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < 0 < b$ y tales que $p(a) < 0$ mientras que $p(b) > 0$. Como p puede considerarse una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el Teorema del Valor Intermedio nos dice que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $p(x_0) = 0$; como necesitábamos establecer.