Examen Final

Cálculo I

(Marzo - Agosto, 2007)

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH

Nombre completo:______________________________________

Correo electrónico:______________________________________

Instrucciones: Este examen está diseñado para dos tipos de alumnos: Si Usted está presentando este examen y desea que su calificación final sea obtenida del promedio de este examen y los dos exámenes parciales entonces deberá resolver los ejercicios: 1, 4a, 5, 6 y 7. Si Usted está presentando este examen de acuerdo al Artículo 34 o desea que su calificación definitiva del curso sea la que obtenga en este exámen, entonces deberá resolver los ejercicios: 1, 2, 3a, 3b, 4a, 4b, 4c, 6 y 7. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de tres horas.

(1) Supóngase que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente y que se cumplen las dos condiciones siguientes
- $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists k > n)\,(a_k > 0)$
- $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists \ell > n)\,(a_\ell < 0)$.

Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.(Sugerencia: ¿Qué pasaría con la mayoría de los términos de la sucesión si el límite no es cero?

(2) Supóngase que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función creciente. Sea $a \in \mathbb{R}$, demuestre que

$$\lim_{x\uparrow a} f(x) = \sup\{f(x) : x < a\}.$$

(3) Demuestre las afirmaciones siguientes:
(a) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in \mathbb{Q}$. Entonces $f = g$. (Sugerencia: dado $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, use una sucesión de racionales que converge a x.)
(b) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, $(\forall x \in \mathbb{R})\,(f(x) \neq g(x))$ y $f(0) > g(0)$, entonces $f(x) > g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (Sugerencia: considere la función $f - g$.)

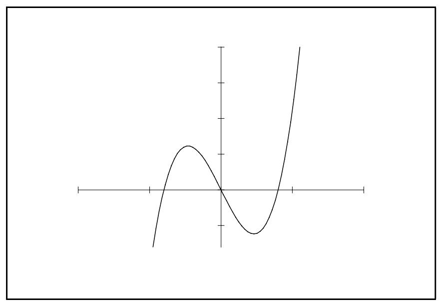
(4) Calcule los límites siguientes:
(a) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$
(c) $\lim_{n\to\infty} \left(n^2 \sqrt[n]{e} - n + n^2\right)$ (Sugerencia: use 4b.)

(5) Sea $m \in \mathbb{N}$ y considere la función $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_m(x) = x^3 - 3x + m$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que tiene a lo más una raíz en el intervalo $[0, 1]$. (Sugerencia: Recuerde el Teorema de Rolle.)

(6) Demuestre que si f es una función continua en x_0, existen $\delta_0 > 0$ y $\delta_1 > 0$ tales que $f'(x) > 0$ para toda $x \in (x_0 - \delta_0, x_0)$ y $f'(x) < 0$ para toda $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$, entonces f alcanza un máximo local en x_0.

  (a) De un ejemplo que muestre que la condición de continuidad en x_0 es importante; es decir, de un contraejemplo si se omite la condición de continuidad.

(7) Supóngase que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable en todo punto de $\mathbb{R}$ y que la gráfica de f' es como se esboza a continuación:



Decida cuál es la gráfica de f.