Examen Extraordinariol
Cálculo I
(Marzo - Agosto, 2007)
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH

Nombre completo:______________________________________

Correo electrónico:______________________________________

Instrucciones: Este examen consta de seis problemas. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

(1) Demuestre que:
  (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.
  (b) Si x, y son reales positivos entonces $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^n+y^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \max\{x, y\}$.

(2) ¿Es posible que $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ pero que $\lim_{x\to x_0} f\cdot g(x) = L < 0$?

(3) Supóngase que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua. Sea $c \in \mathbb{R}$, tal que $f(a) < c < f(b)$. Demuestre que el conjunto

$$\{x \in [a, b] : f(x) = c\}$$

tiene máximo.

(4) Calcule los límites.
  (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x+1}$
  (b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{\log(2x-1)}$

(5) Demuestre que si f es continua en $[a, b]$ y $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estríctamente decreciente en $[a, b]$.

(6) ¿Quién es mayor: e^{π} o π^e? (Sugerencia: compare el logaritmo de esos números y para ello saber que la función $f(x) = \frac{\log x}{x}$ es estríctamente decreciente en un intervalo apropiado será importante.)