Examen Extraordinario
Cálculo I
(Marzo - Agosto, 2007)
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH

Nombre completo:______________________________

Correo electrónico:______________________________

Instrucciones: Este examen consta de cinco problemas. De los siete problemas propuestos Usted deberá escoger cinco de ellos. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de tres horas.

(1) Supóngase que A y B son dos subconjuntos no vacíos de números reales positivos. Demuestre que ellos tienen ínfimo y que

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B,$$

siendo $A + B = \{a + b : a \in A \;\&\; b \in B\}$.

(2) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. ¿Cuáles de las siguentes afirmaciones son ciertas?
(a) Si $a_n^2 \to a^2$, entonces $a_n \to a$.
(b) Si $a_n^3 \to a^3$, entonces $a_n \to a$.

(3) Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene un intervalo cerrado $I_n = [a_n, b_n]$ de modo que $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$ y $I_{n+1} \subseteq I_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tienen a un mismo número real por límite y que tal número es el único número real que pertenece a cada todos los intervalos I_n. Es decir, demuestre que:
(a) $(\exists x_0 \in \mathbb{R})\,(x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n)$ y
(b) Si x_0 es el testigo de la afirmación en (a), entonces

$$(\forall y \in \mathbb{R})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(y \in I_n \Rightarrow x_0 = y)\,.$$

(4) Sean f y g funciones reales. Demuestre que si $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, entonces $\lim_{t\to\infty} (f \circ g)(t) = a$.

(5) Demuestre que el polinomio $p(x) = x^17 + 7x^13 - \pi x^6 + 5x^3 = e$ tiene una raíz en los reales.

(6) Calcule de dos formas el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}.$$

(7) Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua y derivable en $[0, 1]$ tal que $f'(x) \neq 1$ para cada $x \in (0, 1)$. Demostrar que:

(a) Existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$ y

(b) tal x_0 es único.