Examen Adicional
Cálculo I
(Marzo - Agosto, 2007)
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH

Nombre completo:____

Correo electrónico:____

(1) Demuestre que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a cero y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

Solución: Sea $K \in \mathbb{R}$ tal que $|b_n| < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ para todo $n \geq n_0$. Entonces

$$|a_n \cdot b_n| < |a_n| \cdot K < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Consecuentemente $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

(2) Supóngase que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua sin raices en ese intervalo. Considere la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

para $x \in [0,1]$. Demuestre que g es una función contínua.

Solución: Primero observe que si existieran $x_1, x_2 \in (0,1)$ tales que $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, entonces en virtud del Teorema del Valor Intermedio existe z tal que $\min\{x_1, x_2\} < z < \max\{x_1, x_2\}$ y $f(z) = 0$. Por lo tanto, f solamente toma valores positivos o negativos en el intervalo $(0,1)$. Se tiene entonces que g únicamnete toma el valor -1 o el valor 1 en todo el intervalo $(0,1)$; es decir, g es una función constante en dicho intervalo y así g es una función contínua.

(3) Obtenga, si existe,

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

(Sugerencia: Pensando ese límite para una función real podría facilitar las cosas.)

Solución: Recuerde que se demostró en clase que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Esto significa que por definición, dada cualquier sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con términos distintos de cero y que converja a cero se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin t_n}{t_n} = 1.$$

Puesto que $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que cumple las condiciones anteriores se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

(4) Calcule

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{x - \frac{\pi}{2}};$$

pero no pierda su tiempo haciendo cálculos.

Solución: Observe que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x) - \log\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

donde $f(t) = \log(\sin t)$. Como $f'(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$ y $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ se tiene que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{x - \frac{\pi}{2}} = 0.$$

(5) Supóngase que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua que es derivable en el intervalo $(0,1)$ y tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Demuestre que existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $f'(x_0) = 2x_0$.

Solución: Defínase $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x) - x^2$. Puesto que $h(0) = h(1) = 0$, el Teorema de Rolle asegura la existencia de $x \in (0,1)$ tal que $h'(x) = 0$; pero $h'(x) = f'(x) - 2x$.

(6) ¿Será posible que exista una función continua f definida en $(0,\infty)$ que no sea monótona pero que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$? Puede Usted o bien dar las razones por qué una tal función no existe o indicar cómo sería la gráfica de una de esas funciones.

Solución: Una de tales funciones es $f(x) = x + 2\sin x$, ¿podría Usted graficarla para convencerse?