Segundo Examen Parcial
Cálculo I
(Agosto 2007 - Febrero 2008)
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH

Nombre completo:____________________________________

Correo electrónico:____________________________________

Instrucciones: Este examen consta de cinco problemas. De los seis problemas propuestos Usted deberá escoger cinco de ellos. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

(1) Calcule por medio de la definición el límite de $f(x) = \frac{x-|x|}{x-1}$ cuando x tiende a 1.

Solución. Para esto tomemos una sucesión arbitraria $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to 1$. Como el límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es positivo, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ se tiene que $x_n > 0$. Así, para $n \geq N$ tenemos que

$$f(x_n) = \frac{x_n - |x_n|}{x_n - 1} = \frac{x_n - x_n}{x_n - 1} = 0.$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$; consecuentemente se tiene que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0.$$

❏

(2) Supóngase que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es una función tal que para un punto $x_0 \in (a,b)$ se tiene que $\lim_{x\to x_0} f(x) = y > 0$ y $f(x_0) > \frac{y}{2}$. Demuestre que existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que:
(a) $a < c < x_0 < d < b$,
(b) $(\forall x \in (c,d)) \left(f(x) > \frac{y}{2}\right)$.

Solución. Sea $\varepsilon = \frac{y}{2} > 0$. Para este ε existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - y| < \varepsilon$ para todo $x \in (a,b)$ que satisfaga $0 < |x - x_0| < \delta$. Equivalentemente, $\frac{y}{2} < f(x) < \frac{3y}{2}$ siempre que $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$. Observe que se puede elegir δ de modo que

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a,b).$$

Como además sabemos que $f(x_0) > \frac{y}{2}$, entonces haciendo

$$c = x_0 - \delta \text{ y } d = x_0 + \delta$$

se tiene la conclusión. ❏

(3) Calcule el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}-1}.$$

Solución. Primero observe que

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}-1} = \frac{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}{(1-x)-1}$$

para todo $x \neq 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}-1} &= \lim_{x\to 0} -\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right) \\
&= \lim_{x\to 0} -\sqrt[3]{(1+x)^2} - \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{1+x} + - \\
&= -\sqrt[3]{\left(\lim_{x\to 0} 1+x\right)^2} - \sqrt[3]{\lim_{x\to 0} 1+x} - 1 \\
&= -3.
\end{aligned}$$

❏

(4) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, ¿cuánto vale $f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$?

Solución. Basta ver a qué es igual $f(x)$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Fijemos un tal $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y tomemos cualqueir sucesión de racionales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$. Hemos observado frecuentemente que tales sucesiones siempre existen. Como por resultados de sucesiones $x_n^2 \to x^2$ y como la función f es continua en x se tiene que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = x^2.$$

Por lo tanto, $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ❏

(5) Supóngase que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Demuestre que entonces una de las dos siguientes afirmaciones es válida:

(a) Se tiene que $f(x) > 0$, para todo $x \in [a,b]$.
(b) Se tiene que $f(x) < 0$, para todo $x \in [a,b]$.

Solución. Supóngase que ninguna de las afirmaciones en (a) y (b) se cumplen. Entonces existen $a_1, b_1 \in [a,b]$ tales que $f(a_1) < 0$ y $f(b_1) > 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a_1 < b_1$ (si ocurriera que $a_1 > b_1$ se tiene un razonamiento completamente análogo).

Ahora, la función es continua en el intervalo $[a_1, b_1]$ porque es continua en el intervalo $[a, b]$ y la función restringida a este intervalo satisface las hipótesis del Teorema del Valor Intermedio para $c = 0$ y por este resultado debe existir $x_0 \in (a_1, b_1)$ tal que $f(x_0) = 0$, lo cual contradice una de las hipótesis. Por lo tanto, no pueden ser simultáneamente falsas las afirmaciones en (a) y (b), como se quería establecer. ❏

(6) Sean $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que:

$$\sup \{f(x) : x \in [a, b]\} = \sup \{f(x) : x \in (a, b)\}.$$

Solución. Por el Teorema de los Valores Extremos sabemos que f alcanza su máximo en el intervalo $[a, b]$; o sea, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ para todo } x \in [a, b].$$

En otras palabras, $f(x_0)$ es el máximo del conjunto $\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Además, debe ser claro que $f(x_0)$ es una cota superior del conjuto $\{f(x) : x \in (a, b)\}$. Veamos que

$$f(x_0) = \sup \{f(x) : x \in (a, b)\}.$$

Para esto probaremos que

(*) $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in (a, b))(f(x_0) - \varepsilon < f(x) \leq f(x_0)).$$

Bien, fijemos $\varepsilon > 0$. Para este ε, por la continuidad de f existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$$

es decir,

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) \leq f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon,$$

siempre que $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b)$. Además, siempre es posible elegir un $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b)$, este y testificará la afirmación en (*) para el ε fijado de antemano. ❏