Tercer Examen Parcial
Cálculo I
(Agosto 2007 - Enero 2008)
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH

Nombre completo:____

Correo electrónico:____

Instrucciones: Este examen consta de cinco problemas. De los seis problemas propuestos Usted deberá escoger cinco de ellos. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

(1) Demuestre que si f es una función par que es derivable en todo $\mathbb{R}$, entonces f' es una función impar.

Solución: Hay dos maneras, la más rápida es usar Regla de la Cadena: Haciendo $g(x) = -x$ se tiene que $f(-x) = f(g(x))$ y en consecuencia

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = -f'(x).$$

Como eso era muy fácil mejor intentemos directamente por la definición:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(-(x+h)) - f(-x)}{h} \\ &= -\lim_{h \to 0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h} \\ &= -f'(-x). \end{aligned}$$

(2) ¿Cómo es la función $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$: creciente o decreciente? Demuestre su afirmación.

Solución: Nótese que $f'(x) = \frac{1}{x \log \frac{1}{3}}$ para $x > 0$. Consecuentemente $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$ y así f es una función siempre decreciente.

(3) Demuestre que si $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = a > 1$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \infty.$$

Solución: Sea $K \in \mathbb{R}$ que sin pérdida de generalidad lo podemos suponer positivo. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cualquier sucesión en el dominio de h, donde $h(x) = f(x)^{g(x)}$, tal que $x_n \to x_0$ y $x_n \neq x_0$ para todo

$n \in \mathbb{N}$. Primeramente como $\lim_{x \to x_0} f(x) = a > 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(x_n) > \frac{a+1}{2} > 1$$

para todo $n \geq n_1$. Observe que para $n \geq n_1$ tenemos que $\log(f(x)) > \log \frac{a+1}{2}$.

Por otro lado, dado que $\lim_{x \to x_0} g(x)$ sabemos que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$g(x_n) > \frac{\log K}{\log \frac{a+1}{2}}.$$

Por lo tanto, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y usando ambas las desigualdades anteriores se tiene que

$$g(x) \cdot \log(f(x_n)) > \log K$$

para $n \geq n_0$. Recordando que log es una función estríctamente creciente se tiene que

$$f(x_n)^{g(x_n)} > K$$

para $n \geq n_0$. Se sigue así que $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \infty$.

(4) Demuestre que un polinomio de grado n tiene a lo más n raíces en $\mathbb{R}$.

Solución: Procedamos por inducción.[1] La afirmación es trivialmente cierta para $n = 1$. Supóngase que todo polinomio de grado n tiene a lo más n raíces. Sea $p(x)$ un polinomio de grado $n+1$. Considerando a p como función de x, se tiene que p es derivable y su derivada es un polinomio de grado n. Si ocurriera que $p(x)$ tiene más de $n+1$ raíces entonces por un uso elemental del Teorema de Rolle se sigue que $p'(x)$ tiene al menos $n+1$ raíces, lo cual contradice nuestra hipótesis de inducción. Por lo tanto, $p(x)$ no tiene más de $n+1$ raíces.

Por el Principio de Inducción se tiene la afirmación en el enunciado del ejercicio.

(5) Demuestre que si f es continua en $[a, b]$ y $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estríctamente decreciente en $[a, b]$.

Solución: Sean $x, y \in [a, b]$ con $x < y$. Deseamos demostrar que $f(x) > f(y)$. Puesto que f es derivable en $[a, b]$ podemos aplicar el Teorema del Valor Medio a f en el intervalo $[x, y]$. Entonces

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

para algún $c \in (x, y)$. Por hipótesis tenemos que $f'(c) < 0$ y consecuentemente esto implica que $f(y) - f(x) < 0$, como se quería establecer.

[1] Puede resolverse también usando repetidamente el Teorema de Rolle, pero me gusta más por inducción.

(6) De una idea de la gráfica de una función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que la recta $y = 0$ es una asíntota de f y que

$$\lim_{x \to \infty} f'(x)$$

no existe.

Solución: La gráfica de una función que cumpla dichas condiciones debe aproximarse a la recta $y = 0$ y puede, por ejemplo, estár arriba y abajo de dicha recta una cantidad infinita de veces y, por ejemplo, la curva tenga infinitos puntos tal que la recta tangente a la gráfica tenga pendiente 1 e infinitos puntos tal que la recta tangente a la gráfica tenga pendiente -1. De ese modo se podrían escoger dos sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $f'(x_n) = 1$ y $f'(y_n) = -1$. Consecuentemente $\lim_{x \to \infty} f'(x)$ no existe.