Cálculo 1,
Agosto 2007 — Febrero 2008.
Ejercicios 1

1. Resuelva por favor de los Ejercicios 3.1 página 28 de mi libro *Teoría de Conjuntos, una introducción* los siguientes: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9.

2. Demuestre que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que:

   (a) $a - b = -(b - a)$,

   (b) $(a + b)(a - b) - a(a - b) + b(b - a) = 0$,

   (c) $a \cdot b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0 \;\vee\; b = 0$,

   (d) $(-a)(c - d) = ad - ac$,

   (e) si además $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$ y $(-a)^{-1} = -\left(a^{-1}\right)$,

   (f) $a^{-1} = 1 \Rightarrow a = 1$,

   (g) $(-a)^2 = a^2$,

   (h) $(ab)^2 = a^2 b^2$,

   (i) $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$,

   (j) Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,

   (k) Si $a > 0$ y $b > 0$, ¿cuándo $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?

3. Demuestre que para todo $b > 0$, si $a < 0$ entonces $a^2 = b \;\Leftrightarrow\; a = -\sqrt{b}$.

4. ¿Cuál o cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

   (a) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$,

   (b) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = -b$,

   (c) $a^2 = b^2 \Rightarrow a^3 = b^3$.

5. Demostrar que para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $a^3 = 1 \;\Leftrightarrow\; a = 1$.

6. Demostrar que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que $a^3 = b^3 \;\Leftrightarrow\; a = b$.

7. Hallar el error en la "demostración" de la afirmación: Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a = 0$.

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R} \quad & \Rightarrow a^2 = a^2 \\ & \Rightarrow a^2 - a^2 = a^2 - a^2 \\ & \Rightarrow (a - a)(a + a) = a(a - a) \\ & \Rightarrow a + a = a \\ & \Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

8. ¿Es cierto que si $a = b$ y $c < d \Rightarrow a - d < b - c$?

9. ¿Es cierto que si $a = b$ y $c < d \Rightarrow a - c < b - d$?

10. Demuestra que no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que si $c > 0$, entonces $x^2 + c = 0$.

11. Si $0 < a < b$ demuestre que $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

12. Determinar cuáles son los números reales que satisfacen:

    (a) $\left|x^2 - 6x - 2\right| = 0$,
    (b) $\left|x^2 + 1\right| = 0$,
    (c) $|4x - 6| = 3x - 7$.

13. Si $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces

    (a) Si x y y tienen el mismo signo, entonces $xy > 0$,
    (b) $x > 0 \ \& \ y > 0 \Rightarrow xy > 0 \ \ \& \ \ x + y > 0$,
    (c) Si x y y tienen signos contrarios entonces $xy < 0$.

14. Demostrar que $(\forall x \in \mathbb{R}) \left(|x|^2 = x^2\right)$.