$\mathbb{Q}$, los racionales, no es completo.

Septiembre 7, 2007.

No es muy difícil demostrar que cada uno de los axiomas de campo y los axiomas de orden por los cuales introdujimos a los números reales, $\mathbb{R}$, son también válidos en el conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los números racionales. El único de los axiomas con que presentamos a $\mathbb{R}$ que no es válido en $\mathbb{Q}$ es el importante Axioma del Supremo.

En esta nota se presenta un subconjunto acotado de $\mathbb{Q}$ que carece de supremo en $\mathbb{Q}$. Para entender mejor esto, se le pide al lector que piense por un momento que solamente existen números racionales, definiremos el conjunto y trabajaremos siempre cuidando que solamente se ocupen conceptos que puedan ser definidos en el sistema de los números racionales.

Empecemos por definir al conjunto:

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\right\}.$$

Es bastante claro que este conjunto no es vacío (cero es uno de sus elementos) y está acotado superiormente (100 es una de sus cotas superiores).

Primero veamos que ningún $u \in \mathbb{Q}$ tal que $u^2 > 2$ puede ser la mínima cota superior del conjunto A. En efecto, como $u^2 > 2$, entonces

$$u = \frac{u^2}{u} = \frac{u+u}{2} = \frac{u + \frac{u^2}{u}}{2} > \frac{u + \frac{2}{u}}{2}.$$

Además

$$\left(\frac{u + \frac{2}{u}}{2}\right)^2 = \frac{u^2 + 4 + \frac{4}{u^2}}{4} = \frac{u^2 + \frac{4}{u}}{4} + 1.$$

Por otro lado

$$= \frac{u^2 - 4 + \frac{4}{u^2}}{4} = \frac{u^2 + \frac{4}{u}}{4} - 1,$$

por lo que

$$\left(\frac{u + \frac{2}{u}}{2}\right)^2 = 2 + \left(\frac{u - \frac{2}{u}}{2}\right)^2.$$

Puesto que $\left(\frac{u-\frac{2}{u}}{2}\right)^2 \neq 0$ (puede el lector demostrar por qué) se tiene en consecuencia que

$$\left(\frac{u+\frac{2}{u}}{2}\right)^2 > 2.$$

Es decir, si u es cota superior del conjunto y $u^2 > 2$, entonces $\frac{u+\frac{2}{u}}{2}$ también es cota superior de nuestro conjunto y $\frac{u+\frac{2}{u}}{2} < u$.

Finalmente veamos que si $v \in A$ y $v \geq 1$ entonces v no es cota superior de A. La idea en este caso es escoger $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $\left(v+\frac{1}{n}\right)^2 < 2$; de este modo $v + \frac{1}{n} \in A$ y es mayor que v.

Sabemos que

$$\left(v+\frac{1}{n}\right)^2 = v^2 + \frac{2v}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Hagamos $\varepsilon = 2 - v^2 > 0$. Entonces si escogemos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2v}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$$

y

$$\frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{3},$$

se tendría que $\left(v+\frac{1}{n}\right)^2 < v^2 + \frac{2\varepsilon}{3} < 2$. Para lograr esto necesitamos que

$$3\,(2v) < n \cdot \varepsilon \tag{1}$$

y

$$3 < n^2 \cdot \varepsilon. \tag{2}$$

Como estamos suponiendo que $v \geq 1$, la desigualdad (1) implica la desigualdad (2). Por lo tanto necesitamos únicamente escoger $n \in \mathbb{N}$ tal que $3\,(2v) < n \cdot \varepsilon$ que existe por la Propiedad Arquimediana[1].

En uno de los ejercicios se pide demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Como una sugenrencia, razone por contradicción y empiece por escribir a $\sqrt{2}$ como una fracción irreducible.

[1] Aquí nos referimos a la versión en $\mathbb{Q}$ de dicha propiedad. Es posible hacer una demostración de ella que solamente use elementos emanados de $\mathbb{Q}$. El lector interesado puede consultar: F. Hernández Hernández, *Teoría de Conjuntos, una introducción.* Volumen 13 de la Serie Textos de Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana. México 2003.