3

Álgebra de Conjuntos

En este capítulo, como en los siguientes, estudiaremos las operaciones conjuntistas más comunes, por lo que momentáneamente supondremos la existencia de conjuntos como el de los números naturales $\mathbf{N}$,[1] el de los números reales $\mathbf{R}$, o conjuntos que de ellos se desprenden; esto es sólo con el afán de proporcionar ejemplos ilustrativos de los conceptos que tratemos. La existencia de estos conjuntos será formalizada en su momento.

3.1 Operaciones Fundamentales

En el capítulo anterior la Definición 2.16 reza "A se dice subconjunto de B, $A \subseteq B$, si todo elemento de A es también un elemento de B". La relación de contención $\subseteq$ tiene las siguientes propiedades para conjuntos A, B y C.

(1) $A \subseteq A$.
(2) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.
(3) $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ si y sólo si $A = B$.

(1), (2), (3) se expresan brevemente diciendo que la propiedad de contención es reflexiva, transitiva y antisimétrica, respectivamente.

En los Ejemplos 2.3 y 2.13 se mostró la existencia de dos útiles conjuntos; ahora hacemos una definición formal de ellos.

Definición 3.1 Si A y B son conjuntos, la *unión* de A y B, es el conjunto

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

La *intersección* de A y B es el conjunto

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Acorde a la definición anterior, una condición necesaria y suficiente para que $A \cap B \neq \emptyset$ es que A y B tengan elementos en común.

[1] Aquí consideraremos $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Definición 3.2 Diremos que los conjuntos A y B son *ajenos* si $A \cap B = \emptyset$.

Con la terminología proporcionada por las definiciones anteriores podemos formular el Axioma de Fundación como sigue: "En cada conjunto no vacío A existe un elemento $u \in A$ que es ajeno a A, es decir, $u \cap A = \emptyset$".

El siguiente teorema nos muestra cómo se comportan la unión $\cup$ y la intersección $\cap$ con respecto de la contención.

Teorema 3.3 *Para cualesquiera conjuntos A, B, C, D tenemos:*
(a) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
(b) Si $A \subseteq C$ *y* $B \subseteq D$ *entonces* $A \cap B \subseteq C \cap D$ *y* $A \cup B \subseteq C \cup D$.
(c) $A \subseteq C$ *y* $B \subseteq C$ *si y sólo si* $A \cup B \subseteq C$.

Demostración:

Solamente probaremos *(a)* dejando como ejercicio para el lector las partes *(b)* y *(c)*. Si $x \in A \cap B$ entonces $x \in A$ y $x \in B$, así en particular $x \in A$, es decir $A \cap B \subseteq A$. Por otra parte, para cualquier $x \in A$ se tiene que $x \in A \cup B$ por definición de $A \cup B$, es decir, $A \subseteq A \cup B$. ■

El siguiente teorema puede demostrarse sin dificultad.

Teorema 3.4 *Las operaciones $\cap$ y $\cup$ son:*
(a) Reflexivas: para todo A,

$$A \cap A = A = A \cup A.$$

(b) Asociativas:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad y \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

(c) Conmutativas:

$$A \cap B = B \cap A \quad y \quad A \cup B = B \cup A.$$

Más aún, $\cap$ distribuye sobre $\cup$ y $\cup$ distribuye sobre $\cap$:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

y

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

En virtud de la asociatividad, podemos designar a $A\cup(B\cup C)$ simplemente por $A\cup B\cup C$. Similarmente, una unión y una intersección de cuatro conjuntos, digamos $(A\cup B)\cup(C\cup D)$ y $(A\cap B)\cap(C\cap D)$, pueden ser escritas como $A\cup B\cup C\cup D$ y $A\cap B\cap C\cap D$ puesto que la distribución de paréntesis es irrelevante, y por la conmutatividad el orden de los términos también es irrelevante. Por inducción, la misma observación es aplicable a la unión y la intersección de cualquier número finito de conjuntos. La unión y la intersección de n conjuntos son escritas como

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k, \qquad \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

Ahora daremos una caracterización de la propiedad $A\subseteq B$ en términos de la unión y la intersección.

Teorema 3.5 *Los siguientes enunciados son equivalentes:*
(a) $A\subseteq B$.
(b) $A=A\cap B$.
(c) $B=A\cup B$.

DEMOSTRACIÓN:

(a) $\Rightarrow$ *(b).* Supongamos que $A\subseteq B$. Por 3.3(a) sabemos que $A\cap B\subseteq A$. Ahora, si $x\in A$ entonces $x\in A$ y $x\in B$ (ya que $A\subseteq B$); o sea, $x\in A\cap B$. Por lo tanto, $A\subseteq A\cap B$. Así concluimos que $A=A\cap B$.

(b) $\Rightarrow$ *(c).* Si $A=A\cap B$ entonces se tienen las siguientes implicaciones: $x\in A\cup B\Rightarrow(x\in A)\vee(x\in B)\Rightarrow(x\in A\cap B)\vee(x\in B)\Rightarrow x\in B$, lo cual muestra que $A\cup B\subseteq B$, y nuevamente 3.3(a) nos proporciona $B\subseteq A\cup B$. Por lo tanto, $B=A\cup B$.

(c) $\Rightarrow$ *(a).* Si $B=A\cup B$ entonces $A\subseteq A\cup B=B$. ■

Definición 3.6 La *diferencia* de dos conjuntos A y B es

$$A\setminus B=\{x\in A : x\notin B\}.$$

El Ejercicio 2.2.3 del capítulo anterior nos muestra que tal conjunto existe.

Ejemplo 3.7 Si $A=\{x\in\mathbf{R} : 0\le x\le 1\}$ y $B=\left\{x\in\mathbf{R} : \frac{1}{2}<x\le 2\right\}$, entonces $A\setminus B=\left\{x\in\mathbf{R} : 0\le x\le\frac{1}{2}\right\}$.

Ejemplo 3.8 $A\setminus\emptyset=A$ y $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$.

Ejemplo 3.9 Si $A\setminus B=A$, entonces $A\cap B=\emptyset$.

Ejemplo 3.10 $A \setminus B = \emptyset$ si y sólo si $A \subseteq B$.

La operación diferencia no tiene propiedades tan simples como $\cap$ y $\cup$; por ejemplo: si $A \neq \emptyset$, $(A \cup A) \setminus A \neq A \cup (A \setminus A)$, es decir, la colocación de paréntesis en $A \cup A \setminus A$ es importante. Otra diferencia es que, mientras que la unión y la intersección son operaciones conmutativas, por su propia definición la diferencia de conjuntos no es conmutativa.

Por otra parte, obsérvese que la negación de la proposición $x \in A \setminus B$, es equivalente a la proposición: $x \notin A \ \vee \ x \in B$, es decir, $x \notin A \setminus B$ si y sólo si x no es un elemento de A o x es un elemento de B. Ahora $x \in A \setminus (A \setminus B)$ si y sólo si $x \in A \wedge x \notin A \setminus B$ si y sólo si $[x \in A] \ \wedge \ [x \notin A \ \vee \ x \in B]$ si y sólo si $[x \in A \ \wedge x \notin A] \ \vee \ [x \in A \ \wedge \ x \in B]$ si y sólo si $x \in A \cap B$; hemos probado la siguiente proposición.

Proposición 3.11 *Para conjuntos arbitrarios A y B tenemos que*

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

Definición 3.12 Si $A \subseteq B$ el *complemento* de A *con respecto de* B es el conjunto $B \setminus A$.

Teorema 3.13 *Para cualesquiera dos conjuntos A y B, y cualquier conjunto E que contenga a $A \cup B$,*

$$A \setminus B = A \cap (E \setminus B).$$

DEMOSTRACIÓN:

Como $A \cup B \subseteq E$, tenemos que $A \setminus B = \{x \in E : (x \in A) \wedge (x \notin B\} = \{x \in E : x \in A\} \cap \{x \in E : x \notin B\} = A \cap (E \setminus B)$. ■

Teorema 3.14 *Si E es un conjunto que contiene a $A \cup B$, entonces:*
(a) $A \cap (E \setminus A) = \emptyset, \quad A \cup (E \setminus A) = E.$
(b) $E \setminus (E \setminus A) = A.$
(c) $E \setminus \emptyset = E, \quad E \setminus E = \emptyset.$
(d) $A \subseteq B$ *si y sólo si* $E \setminus B \subseteq E \setminus A.$

El siguiente es uno de los resultados elementales de mayor uso, se conoce habitualmente como *Leyes de De Morgan*.

Teorema 3.15 *Si $A, B \subseteq X$ entonces:*
(a) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B).$
(b) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$

Demostración:

$x \in X \setminus (A \cup B)$ si y sólo si $x \in X$ y $x \notin A \cup B$ si y sólo si $x \in X$, $x \notin A$ y $x \notin B$ si y sólo si $x \in X \setminus A$ y $x \in X \setminus B$. Esto establece *(a);* para probar *(b)* hacemos: $X \setminus [(X \setminus A) \cup (X \setminus B)] = [X \setminus (X \setminus A)] \cap [X \setminus (X \setminus B)] = A \cap B$; entonces $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$. ■

Definición 3.16 Sean A y B conjuntos, se define la *diferencia simétrica* de A y B como:

$$A \bigtriangleup B = \{x \in A : x \notin B\} \cup \{x \in B : x \notin A\} .$$

En el Ejercicio 2.2.8 del capítulo anterior se pide demostrar que la diferencia simétrica de dos conjuntos existe.[2] La diferencia simétrica tiene las siguientes propiedades:

Teorema 3.17 *Para conjuntos A, B y C se tiene:*
(a) $A \bigtriangleup \emptyset = A$.
(b) $A \bigtriangleup A = \emptyset$.
(c) $A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$.
(d) $(A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C = A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C)$.
(e) $A \cap (B \bigtriangleup C) = (A \cap B) \bigtriangleup (A \cap C)$.
(f) Si $A \bigtriangleup B = A \bigtriangleup C$ *entonces* $B = C$.

Observemos además que, para cualesquiera dos conjuntos A y C existe - exactamente un conjunto B tal que $A \bigtriangleup B = C$, a saber, $B = A \bigtriangleup C$, en otras palabras:

$$A \bigtriangleup (A \bigtriangleup C) = C,$$
$$A \bigtriangleup B = C \quad \Rightarrow \quad B = A \bigtriangleup C.$$

En efecto, los incisos *(a), (b)* y *(d)* del Teorema 3.17 implican que $A \bigtriangleup (A \bigtriangleup C) = (A \bigtriangleup A) \bigtriangleup C = \emptyset \bigtriangleup C = C \bigtriangleup \emptyset = C$. Además si $A \bigtriangleup B = C$ entonces $A \bigtriangleup (A \bigtriangleup B) = A \bigtriangleup C$ y por tanto, $B = A \bigtriangleup C$. Lo anterior nos dice que la operación $\bigtriangleup$ es inversa de sí misma.

El lector que conozca la definición de anillo, utilizando el Teorema 3.4 en sus partes *(b)* y *(c)* referentes a la intersección y el Teorema 3.17, podrá darse cuenta que para cualquier conjunto X, el conjunto $\mathcal{P}(X)$ con las operaciones $\bigtriangleup$ y $\cap$ funcionando como suma y producto, es un anillo conmutativo con unidad X. Una peculiaridad de este anillo es que la operación "sustracción" coincide con la operación "suma" y más aún, el "cuadrado" de cualquier elemento es

[2] Las propiedades de la diferencia simétrica fueron investigadas extensivamente por Hausdorff en [H_5].

igual a ese elemento. Note que $\cup$ y $\setminus$ no funcionan como suma y sustracción, respectivamente.

Usando $\triangle$ y $\cap$ como las operaciones básicas, los cálculos en el álgebra de conjuntos pueden resolverse por aritmética ordinaria. Además, podemos omitir todos los exponentes y reducir todos los coeficientes módulo 2 (es decir, $2kA = \emptyset$ y $(2k+1)A = A$).

Este resultado es significativo puesto que las operaciones $\cup$ y $\setminus$ pueden ser expresadas en términos de $\triangle$ y $\cap$. Este hecho hace que toda el álgebra de subconjuntos de un conjunto particular X pueda ser representada como la aritmética en el anillo $\mathcal{P}(X)$. En efecto, uno puede fácilmente verificar que:

$$A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$$
$$A \setminus B = A \triangle (A \cap B).$$

Ejercicios 3.1

1. Demuestre las partes (b) y (c) del Teorema 3.3.
2. Demuestre el Teorema 3.4.
3. (a) Demuestre que si $A \subseteq C$ entonces $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
   (b) ¿Será cierto el resultado anterior si se suprime la hipótesis $A \subseteq C$?
   (c) Demuestre que $A \subseteq C$ si y sólo si $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
4. Pruebe las afirmaciones hechas en los Ejemplos 3.8, 3.9 y 3.10.
5. Muestre que si $A \neq \emptyset$ entonces $(A \cup A) \setminus A \neq A \cup (A \setminus A)$.
6. Demuestre el Teorema 3.14.
7. Pruebe que

   (a) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$.
   (b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
   (c) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
   (d) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$.
   (e) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.
   (f) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = A \cap (C \setminus B)$.

(g) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = (A_1 \setminus A_2) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A_1) \cup (\bigcap_{k=1}^{n} A_k)$.

(h) Si $A, B \subseteq X$, entonces $(X \setminus A) \setminus (X \setminus B) = B \setminus A$.

8. Muestre por medio de ejemplos que las siguientes proposiciones son falsas.

   (a) $A \setminus B = B \setminus A$.

   (b) $A \subseteq (B \cup C)$ implica $A \subseteq B$ o $A \subseteq C$.

   (c) $B \cap C \subseteq A$ implica $B \subseteq A$ o $C \subseteq A$.

9. Sea X un conjunto que contiene a $A \cup B$.

   (a) Demuestre que si $A \cup B = X$ entonces $X \setminus A \subseteq B$.

   (b) Demuestre que si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \subseteq X \setminus B$.

   (c) Utilizando los incisos anteriores demuestre que $A = X \setminus B$ si y sólo si $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$.

10. Pruebe que el sistema de ecuaciones $A \cup X = A \cup B$, $A \cap X = \emptyset$ tiene a lo más una solución para X.

11. Sea A un conjunto. Demuestre que el "complemento" de A no es un conjunto. (El "complemento" de A es el conjunto de todos los $x \notin A$).

12. Pruebe el Teorema 3.17.

13. Pruebe que $A \triangle B = \emptyset$ si y sólo si $A = B$.

14. Pruebe que

$$A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$$
$$A \setminus B = A \triangle (A \cap B).$$

3.2 Producto Cartesiano

Las operaciones de unión e intersección nos proporcionan nuevos conjuntos a partir de otros conjuntos dados. En esta sección introduciremos otro conjunto construido a partir de dos conjuntos A y B, que denotaremos por $A \times B$ y llamaremos el producto cartesiano de A y B. El producto cartesiano es una de las construcciones más importantes de la Teoría de Conjuntos, pues permite expresar muchos conceptos fundamentales de matemáticas en términos de conjuntos.

A diferencia de los elementos de la unión y de la intersección, los elementos del producto cartesiano son de naturaleza distinta a los elementos de A y de B, ya que $A \times B$ consistirá de lo que a continuación definiremos como parejas ordenadas de elementos. Intuitivamente una pareja ordenada es una entidad consistente de dos objetos en un orden específico. Para el empleo de la noción de par ordenado en matemáticas, uno desea que los pares ordenados tengan dos propiedades: *(i)* dados dos objetos a y b, exista un objeto, el cual puede ser denotado por (a, b) que esté unívocamente determinado por a y b; *(ii)* si (a, b) y (c, d) son dos pares ordenados, entonces $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Por el Ejemplo 2.35, es posible definir un objeto, de hecho un conjunto, con la propiedad *(i)*.

Definición 3.18 Se define el *par ordenado* de elementos a y b como

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Si $a \neq b$, (a, b) tiene dos elementos, un singular $\{a\}$ y un par no ordenado $\{a, b\}$. La *primera coordenada* de (a, b) es el elemento que pertenece a ambos conjuntos, o sea a, y la *segunda coordenada* es el elemento perteneciente a sólo uno de los conjuntos, a saber, b. Si $a = b$, entonces $(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\}$ tiene un único elemento; en este caso ambas coordenadas son iguales. Es muy oportuno observar que $(a, b) \subseteq \mathcal{P}(\{a, b\})$.

Probaremos ahora que los pares ordenados tienen la propiedad *(ii)* antes mencionada.

Teorema 3.19 *$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.*

Demostración:

$\Leftarrow$] Si $a = c$ y $b = d$, entonces:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} = (c, d).$$

$\Rightarrow$] Supongamos que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Si $a \neq b$, entonces debe suceder que $\{a\} = \{c\}$ y $\{a, b\} = \{c, d\}$. Así, $a = c$, y entonces $\{a, b\} = \{a, d\}$. De esto se deduce que $b = d$. Si $a = b$, $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$. Así $\{a\} = \{c\}$ y $\{a\} = \{c, d\}$, lo cual implica que $a = c = d$. Por lo tanto, $a = c$ y $b = d$. ■

Con los pares ordenados a nuestra disposición podemos definir ternas ordenadas como

$$(a, b, c) = ((a, b), c),$$

cuartetas ordenadas como

$$(a, b, c, d) = ((a, b, c), d),$$

etc.; y es evidente que la correspondiente caracterización (Teorema 3.19) de igualdad también es apropiada.

Kuratowski [K_6] en 1921 fue el primero en dar una definición satisfactoria de par ordenado. Lo complicado de tal definición reside en evitar toda referencia a la forma de escribir los símbolos (a, b). Los filósofos de la primera época de la Teoría de Conjuntos se encontraron metidos en un problema en lo relativo a dicha cuestión. La dificultad reside en eliminar la simetría existente entre a y b. El motivo por el cual los filósofos no consiguieron hacerlo fue su confusión en cuanto a la distinción que existe entre x y $\{x\}$, pues querían que fuese lo mismo. Poniendo $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, la asimetría del segundo miembro basta para probar el Teorema 3.19, el cual hace que la definición de par ordenado sea adecuada.

Definición 3.20 Sean A y B conjuntos cualesquiera. El *producto cartesiano* de A y de B es el conjunto $A \times B$ es el conjunto consistente de todos aquellos pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$, esto es,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Estamos describiendo un nuevo conjunto y por ende debemos asegurar su existencia como tal, es por ello que damos la siguiente proposición que nos afirma que $A \times B$ es un conjunto.

Proposición 3.21 *Para cualesquiera A y B, $A \times B$ es un conjunto.*

DEMOSTRACIÓN:

Por el Ejemplo 2.27 del Capítulo 2 tenemos que siempre que $a \in A$ y $b \in B$ entonces $\mathcal{P}(\{a, b\}) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, y como $(a, b) \subseteq \mathcal{P}(\{a, b\})$, se sigue que cuando $a \in A$ y $b \in B$ se tiene que $(a, b) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, o bien $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Por lo tanto,

$$A \times B = \{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) : a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Ya que $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ existe, la existencia de $A \times B$ como conjunto se sigue del Axioma Esquema de Comprensión. ■

Denotaremos $A \times A$ por A^2. Hemos definido una terna ordenada de elementos a, b y c como $(a, b, c) = ((a, b), c)$. Para ser consistentes con esa definición, introducimos el producto cartesiano de tres conjuntos A, B y C como

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C.$$

Note que

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) : a \in A \ \wedge \ b \in B \ \wedge \ c \in C\}.$$

Usando una obvia extensión de nuestra notación, $A \times A \times A$ será denotado por A^3. De modo análogo, el producto cartesiano de cuatro conjuntos puede también ser introducido.

Ejemplo 3.22 Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4, 5\}$. Entonces

$$A \times B = \{(1,2),\ (1,4),\ (1,5),\ (2,2),\ (2,4),\ (2,5),\ (3,2),\ (3,4),\ (3,5)\}.$$

Ejemplo 3.23 Si $A = \mathbf{R} = B$, entonces $A \times B = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}^2$ es el plano usual de la geometría analítica.

Ejemplo 3.24 Sea $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ (es decir, A es la circunferencia unitaria) y sea $B = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Entonces, $A \times B$ es el conjunto de los puntos de $\mathbf{R}^3$ que están en el cilindro unitario de altura 1.

Teorema 3.25 *(a) $A \times B = \emptyset$ si y sólo si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.*
(b) Si $C \times D \neq \emptyset$, entonces $C \times D \subseteq A \times B$ si y sólo si $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$.
(c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
(d) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Demostración:

La demostración de la proposición en *(a)* es inmediata a partir de las definiciones.

(b) $\Rightarrow$] Veamos que $D \subseteq B$. Un argumento simétrico será suficiente para establecer $C \subseteq A$. Puesto que $C \times D \neq \emptyset$, aplicando *(a)* obtenemos que $C \neq \emptyset$. Fijemos un $c \in C$ arbitrario. Ahora, deseamos demostrar que para todo x, $x \in D \Rightarrow x \in B$. Sea $x \in D$. Entonces $(c, x) \in C \times D$ y luego $(c, x) \in A \times B$. De aquí se sigue que $x \in B$. Por lo tanto $D \subseteq B$.

$\Leftarrow$] Sea $(c, d) \in C \times D$. Entonces $c \in C$ y $d \in D$. Como por hipótesis $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$, se tiene que $c \in A$ y $d \in B$; de aquí $(c, d) \in A \times B$. Por lo tanto, $C \times D \subseteq A \times B$.

(c) $(x, y) \in A \times (B \cup C)$ si y sólo si $x \in A$ y $y \in B \cup C$ si y sólo si $x \in A$ y $y \in B$ o $y \in C$ si y sólo si $x \in A$ y $y \in B$ o bien $x \in A$ y $y \in C$ si y sólo si $(x, y) \in A \times B$ o $(x, y) \in A \times C$ si y sólo si $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

(d) Ejercicio. ■

Para conjuntos no vacíos A y B se tiene que $A \times B = B \times A$ si y sólo si $A = B$; así, la operación producto cartesiano no es conmutativa.

Ejercicios 3.2

1. Pruebe que $(a, b) \subseteq \mathcal{P}(\{a, b\})$.

2. Pruebe que (a, b), (a, b, c) y (a, b, c, d) existen para todo a, b, c y d.

3. Pruebe que $(a, b, c) = (a', b', c')$ si y sólo si $a = a'$, $b = b'$ y $c = c'$.

4. Encuentre a, b y c tales que $((a, b), c) \neq (a, (b, c))$. A pesar de este resultado, puede definirse la terna ordenada de elementos a, b y c como $(a, b, c) = (a, (b, c))$, y el producto cartesiano de A, B y C como $A \times B \times C = A \times (B \times C)$. Más adelante veremos que en términos conjuntistas esta discrepancia es irrelevante.

5. Demuestre que $A \times B = B \times A$ si y sólo si $A = B$.

6. Muestre que

   (a) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$.

   (b) $A^3 \neq A \times A^2$, es decir, $(A \times A) \times A \neq A \times (A \times A)$.
   Este ejercicio muestra que $\times$ no es asociativo.

7. Si A, B son conjuntos no vacíos y $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$, demuestre que $A = B = C$.

8. Pruebe la parte (d) del Teorema 3.25.

9. Demuestre que:

   (a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

   (b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

(c) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

(d) $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$.

10. Sean $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$. Demuestre que:

    (a) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

    (b) $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$. Muestre que es posible que no se dé la igualdad.

    (c) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D) \cup (A \times D) \cup (B \times C)$.

    (d) $(X \times Y) \setminus (B \times C) = ((X \setminus B) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus C)$.

11. Para dos conjuntos A y B, se define la *unión ajena* de A y B como: $A \sqcup B = (A \times \{x\}) \cup (B \times \{y\})$, donde $x \notin B$, $y \notin A$. Demuestre el análogo del Teorema 3.4 para uniones ajenas.

3.3 Familias de Conjuntos

En el párrafo que sigue al Axioma de Unión hablamos de un tipo muy especial de conjuntos: los *sistemas* o *familias* de conjuntos. Estos conjuntos (como otros) tienen como elementos a conjuntos, es decir, una familia de conjuntos es un "conjunto de conjuntos". Las familias de conjuntos juegan un papel destacado en otras ramas de las matemáticas, donde el objetivo es estudiar a familias especiales de conjuntos. Por ejemplo, la Topología no es otra cosa que el estudio de las propiedades un sistema especial de subconjuntos de un conjunto dado X. La terminología sistema o familia de conjuntos tiene por objeto resaltar el hecho de que trataremos a los elementos de la familia como conjuntos mismos. Usualmente denotaremos a las familias de conjuntos con letras mayúsculas caligráficas tales como $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}$. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.26 $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ es un sistema de conjuntos cuyos elementos son el conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto unitario $\{\emptyset\}$.

Ejemplo 3.27 Sea $\mathcal{M} = \{\{x \in \mathbf{N} : x \text{ es par}\}, \{x \in \mathbf{N} : x \text{ es impar}\}\}$. Entonces $\mathcal{M}$ es un sistema de conjuntos cuyos elementos son el conjunto de los números naturales pares y el conjunto de los números naturales impares. Obsérvese que $\mathbf{N} \neq \mathcal{M}$.

Ejemplo 3.28 Para cualquier conjunto X, el conjunto potencia de X, $\mathcal{P}(X)$, es la familia de todos los subconjuntos de X.