PROBLEMAS

1. Para cada una de las siguientes funciones, hallar el máximo y el mínimo en los intervalos indicados, hallando los puntos del intervalo en que la derivada es 0 y comparando los valores en estos puntos con los valores en los extremos.

(i) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ sobre $[-2, 2]$.

(ii) $f(x) = x^5 + x + 1$ sobre $[-1, 1]$.

(iii) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ sobre $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ sobre $[-\frac{1}{2}, 1]$.

(v) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ sobre $[-1, \frac{1}{2}]$.

(vi) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ sobre $[0, 5]$.

2. Trácese ahora la gráfica de cada una de las funciones del problema y hállense los puntos máximo y mínimo locales.

3. Esbozar las gráficas de las funciones siguientes

(i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

(ii) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2}$.

(iii) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4. (a) Si $a_1 < \dots a_n$, hallar el valor mínimo de $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$.

*(b) Hallar ahora el valor mínimo de $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$. Éste es un problema para el que el cálculo infinitesimal no sirve: En los intervalos entre los a_i la función f es lineal, de manera que el mínimo se presenta evidentemente en uno de los a_i, y éstos son precisamente los puntos en que f no es derivable. Sin embargo, la solución es fácil si se considera cómo varía $f(x)$ al pasar de uno a otro de estos intervalos.

*(c) Sea $a > 0$. Demostrar que el valor máximo de

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-a|}$$

es $(2 + a)/(1 + a)$. [Puede hallarse por separado la derivada en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, a)$ y (a, ∞)].

5. Para cada una de las siguientes funciones hallar los puntos máximo y mínimo locales.

(i) $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 3, 5, 7, 9 \\ 5, & x = 3 \\ -3, & x = 5 \\ 9, & x = 7 \\ 7, & x = 9. \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional.} \end{cases}$

(iv) $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1/n \text{ para algún } n \text{ de } \mathbf{N} \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$

(v) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si el desarrollo decimal de } x \text{ contiene un 5} \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$

6. (a) Sea (x_0, y_0) un punto del plano, y sea L la gráfica de la función $f(x) = mx + b$. Hallar el punto $\bar{x}$ tal que la distancia de (x_0, y_0) a $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ sea mínima. Tener en cuenta que hacer mínima esta distancia es lo mismo que hacer mínimo su cuadrado. Esto puede simplificar algo los cálculos.

(b) Hallar también $\bar{x}$ sabiendo que la recta que une (x_0, y_0) con $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ es perpendicular a L.

(c) Hallar la distancia de (x_0, y_0) a L, o sea la distancia de (x_0, y_0) a $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Los cálculos resultarán más sencillos suponiendo primero que es

$b = 0$; el resultado se aplica después a la gráfica de $f(x) - mx$ y al punto $(x_0, y_0 - b)$. Comparar con el Problema 4-22.

(d) Considerar una recta descrita por la ecuación $Ax + By + C = 0$ (Problema 4-7). Demostrar que la distancia de (x_0, y_0) a esta recta es $(Ax_0 + By_0 + C)/\sqrt{A^2 + B^2}$.

7. El problema anterior sugiere la siguiente pregunta: ¿Cuál es la relación entre los puntos críticos de f y los de f^2?

8. Se traza una recta desde el punto $(0, a)$ hasta el eje horizontal y desde ahí otra a $(1, b)$, como en la figura 23. Demostrar que la longitud total es mínima cuando los ángulos α y β son iguales. [Como es natural, deberá entrar en juego una función: expresar la longitud en función de x, donde $(x, 0)$ es el punto del eje horizontal. La línea de puntos de la figura 23 sugiere una demostración geométrica; tanto en un caso como en otro puede resolverse el problema sin necesidad de hallar el punto $(x, 0)$.]

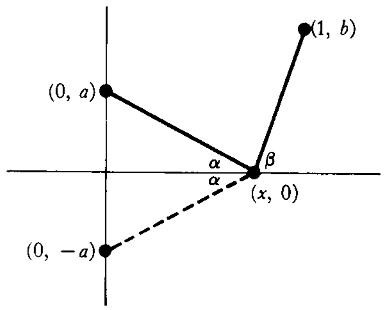

FIGURA 23

9. Demostrar que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

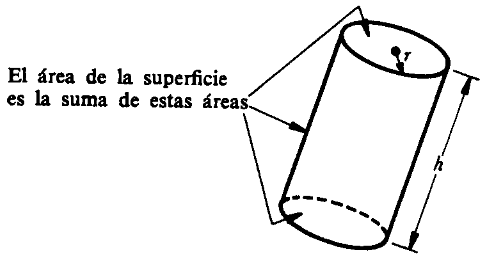

FIGURA 24

10. Entre todos los cilindros circulares rectos de volumen fijo V, hallar el de menor superficie (incluyendo las superficies de las caras superior e inferior como en la figura 24).

11. Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud a, se hace girar alrededor de uno de sus catetos. ¿Qué volumen máximo puede tener un cono engendrado de esta manera?

12. Dos pasillos de anchuras respectivas a y b se encuentran formando ángulo recto. ¿Qué longitud máxima puede tener una escalera de mano para poder ser pasada horizontalmente de uno a otro pasillo? (Figura 25.)

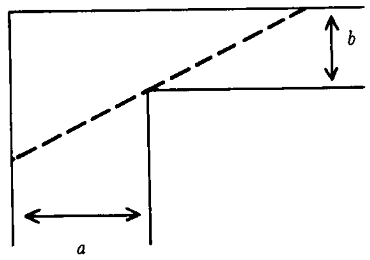

FIGURA 25

13. Se proyecta un jardín en forma de sector circular con un cierto radio R y un cierto ángulo central θ. El área del jardín ha de ser fija A (figura 26). ¿Qué valores de R y θ (en radianes) hacen mínimo el perímetro que bordea el jardín?

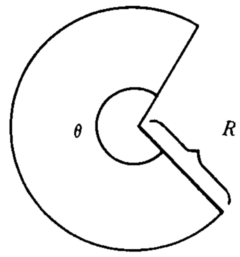

FIGURA 26

14. Demostrar que la suma de un número y su recíproco es por lo menos 2.

15. Hallar el trapecio de área máxima que puede inscribirse en un semicírculo de radio a, con una de sus bases apoyada sobre el diámetro.

16. Se desplaza un ángulo recto a lo largo del diámetro de un círculo de radio a, tal como se indica en la figura 27. ¿Qué longitud máxima $(A + B)$ puede ser interceptada por el círculo?

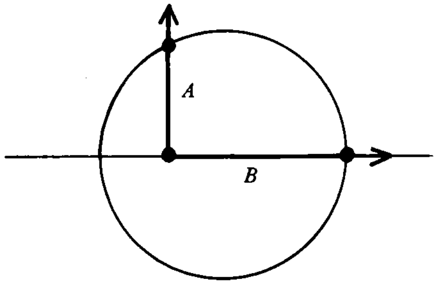

FIGURA 27

17. Miguel, el ecologista, tiene que cruzar un lago circular de una milla de radio. Puede hacerlo ya sea atravesándolo a remo a 2 millas por hora, o bordeándolo a pie a 4 millas por hora, o parte a remo y parte andando (Figura 28). ¿Cómo tendrá que hacerlo para:

(i) ver el máximo de paisaje?

(ii) cruzar lo más rápido posible?

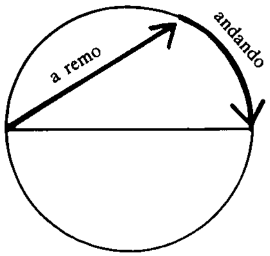

FIGURA 28

18. Se dobla el ángulo inferior derecho de una hoja de papel de modo que toque el lado izquierdo, tal como se indica en la figura 29. Si la anchura del papel es α y la hoja muy larga, demostrar que la longitud mínima de la señal del doblez es $3\sqrt{3}\,\alpha/4$.

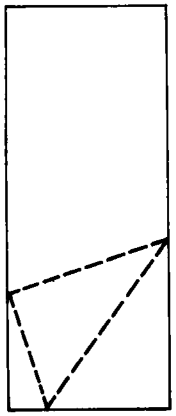

FIGURA 29

19. La figura 30 muestra la gráfica de la *derivada* de f. Hallar todos los puntos máximos y mínimos locales de f.

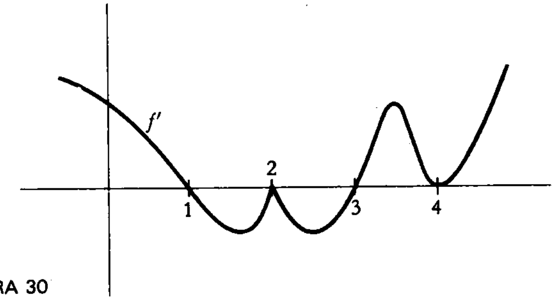

FIGURA 30

***20.** Supongamos que f es una función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ con puntos singulares -1, 1, 2, 3, 4, con los correspondientes valores singulares 6, 1, 2, 4, 3. Trazar la gráfica de f distinguiendo los casos n par y n impar.

***21.** (a) Supongamos que la función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ tiene los puntos singulares -1, 1, 2, 3, y $f''(-1) = 0$, $f''(1) > 0$, $f''(2) < 0$, $f''(3) = 0$. Trazar la gráfica de f con todo el detalle posible a partir de esta información.

(b) ¿Existe alguna función polinómica con las propiedades anteriores, excepto que 3 no es punto singular?

22. Describir la gráfica de una función racional (en términos muy generales, análogamente a la descripción del texto de la gráfica de una función polinómica).

23. (a) Demostrar que dos funciones polinómicas de grados m y n, respectivamente, se cortan a lo sumo en $\max(m, n)$ puntos.

(b) Para cada m y n muéstrense dos funciones polinómicas de grados m y n que se corten $\max(m, n)$ veces.

***24.** (a) Supóngase que la función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ tiene exactamente k puntos singulares y $f''(x) \neq 0$ para todos los puntos singulares x. Demuéstrese que $n - k$ es impar.

(b) Para cada n demostrar que existe una función polinómica f de grado n con k puntos singulares si $n - k$ es impar.

(c) Supóngase que la función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ tiene k_1 puntos máximos locales y k_2 puntos mínimos locales. Demostrar que $k_2 = k_1 + 1$ si n es par y $k_2 = k_1$ si n es impar.

(d) Sean n, k_1, k_2 tres enteros con $k_2 = k_1 + 1$ si n es par y $k_2 = k_1$ si n es impar y $k_1 + k_2 < n$. Demostrar que existe una función polinómica f de grado n con k_1 puntos máximos locales y k_2 puntos mínimos locales. Indicación: Elíjanse $a_1 < a_2 < \ldots < a_{k_1+k_2}$ y pruébese con $f'(x) = \prod_{i=1}^{k_1+k_2} (x - a_i)\cdot(1 + x^2)^l$ para un número apropiado l.

25. (a) Demostrar que si $f'(x) \geq M$ para todo x de $[a, b]$, entonces $f(b) \geq f(a) + M(b - a)$.

(b) Demostrar que si $f'(x) \leq m$ para todo x de $[a, b]$, entonces $f(b) \leq f(a) + m(b - a)$.

(c) Formular un teorema análogo cuando $|f(x)| \leq M$ para todo x de $[a, b]$.

***26.** Supóngase que es $f'(x) \geq M > 0$ para todos los x de $[0, 1]$. Demostrar que existe un intervalo de longitud 1/4 en el que es $|f| \geq M/4$.

27. (a) Supóngase que $f'(x) > g'(x)$ para todo x, y que $f(a) = g(a)$. Demostrar que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

(b) Demostrar mediante un ejemplo que estas conclusiones no son válidas sin la hipótesis $f(a) = g(a)$.

28. Hallar todas las funciones f tales que

(a) $f'(x) = \operatorname{sen} x$.
(b) $f''(x) = x^3$.
(c) $f'''(x) = x + x^2$.

29 Si bien es verdad que un peso que se suelta partiendo del reposo caerá $s(t) = 4{,}9t^2$ metros en t segundos, este hecho experimental no menciona el comportamiento de los pesos que son lanzados hacia arriba o hacia abajo. Por otra parte, la ley $s''(t) = 9{,}8$ se cumple siempre y tiene la ambigüedad suficiente para explicar el comportamiento de un peso soltado desde cualquier altura y con cualquier velocidad inicial. Para mayor sencillez convengamos en medir las alturas hacia arriba desde el nivel del suelo; en este caso las velocidades son positivas para cuerpos que se elevan y negativas para cuerpos que caen, y todos los cuerpos caen según la ley $s''(t) = -9{,}8$.

(a) Demostrar que s es de la forma $s(t) = -4{,}9t^2 + \alpha t + \beta$.

(b) Haciendo $t = 0$ en la fórmula para s, y después en la fórmula para s', demostrar que $s(t) = -4{,}9t^2 + v_0t + s_0$, donde s_0 es la altura desde la cual el cuerpo es soltado en el tiempo 0, y v_0 es la velocidad con la cual se suelta.

(c) Se lanza un peso hacia arriba con una velocidad de v metros por segundo desde el nivel del suelo. ¿A qué altura llegará? («A qué altura» significa «¿cuál es la máxima altura para todos los tiempos?») ¿Cuál es su velocidad en el momento en que alcanza su altura máxima? ¿Cuál es la aceleración en dicho momento? ¿Cuándo llegará otra vez al suelo? ¿Cuál será su velocidad en el momento de alcanzar el suelo?

30. Una bala de cañón se lanza desde el suelo con velocidad v y según un ángulo α (figura 31) de modo que su componente vertical de velocidad es v sen α y la componente horizontal v cos α. Su distancia $s(t)$ sobre el nivel

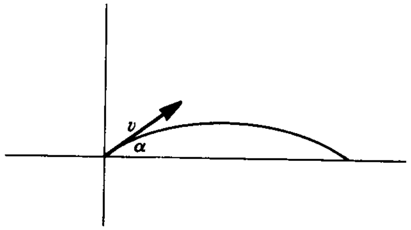

FIGURA 31

del suelo obedece a la ley $s(t) = -4{,}9t^2 + (v \operatorname{sen} \alpha)t$, mientras que su velocidad horizontal permanece constantemente v cos α.

(a) Demostrar que la trayectoria de la bala es una parábola (hallar la posición para cada tiempo t, y demostrar que estos puntos están sobre una parábola).

(b) Hallar el ángulo α que hace máxima la distancia horizontal recorrida por la bala antes de alcanzar el suelo

***31.** (a) Dese un ejemplo de función f para la cual existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$, pero no existe $\lim_{x\to\infty} f'(x)$.

(b) Demostrar que si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ existen ambos, entonces $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

(c) Demostrar que si existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y existe $\lim_{x\to\infty} f''(x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$ (véase también el problema 9-15).

32. Supóngase que f y g son dos funciones derivables que satisfacen $fg' - f'g = 0$. Demostrar que si a y b son ceros contiguos de f, y $g(a)$ y $g(b)$ no son ambos 0, entonces $g(x) = 0$ para algún x entre a y b. (Naturalmente se cumple este mismo resultado intercambiando f y g; así, los ceros de f y g se separan mutuamente.) Indicación: Deducir una contradicción si se supone que $g(x) \neq 0$ para todo x entre a y b: si un número no es 0, hay algo natural que se puede hacer con él.

33. Supóngase que $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^n$ para $n > 1$. Demostrar que f es constante considerando f'. Compárese con el problema 3-20.

34. De una función f se dice que es *Lipschitz de orden α en x* si existe una constante C tal que

$$(*) \qquad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

para todos los y de un intervalo de x. La función f es *Lipschitz de orden α en un intervalo* si la condición (*) se cumple para todos los x e y del mismo.

(a) Si f es Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x, entonces es f continua en x.

(b) Si f es Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en un intervalo, entonces es f uniformemente continua en el mismo (véase capítulo 8, apéndice).

(c) Si f es derivable en x, entonces f es Lipschitz de orden 1 en x. ¿Se cumple la recíproca?

(d) Si f es derivable en $[a, b]$, ¿es f Lipschitz de orden 1 en $[a, b]$?

(e) Si f es Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en $[a, b]$, entonces f es constante en $[a, b]$.

35. Demostrar que si

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

entonces

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

para algún x de $[0, 1]$.

36. Demostrar que, cualquiera que sea m, la función polinómica $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ no tiene nunca dos raíces en $[0, 1]$. (Esto es una consecuencia fácil del teorema de Rolle. Resulta instructivo, una vez dada la demostración analítica, trazar las gráficas de f_0 y f_1 y considerar la posición de la gráfica de f_m en relación con ellas.)

37. Supóngase que f es continua y derivable en $[0, 1]$, que $f(x)$ está en $[0, 1]$ para todo x, y que $f'(x) \neq 1$ para todo x de $[0, 1]$. Demostrar que existe exactamente un número x en $[0, 1]$ tal que $f(x) = x$. La mitad de este problema ha sido visto ya en el problema 7-11.

38. (a) Demostrar que la función $f(x) = x^2 - \cos x$ satisface $f(x) = 0$ para exactamente dos valores de x.

(b) Demostrar lo mismo para la función $f(x) = 2x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos^2 x$ (valdrá la pena hacer algunos tanteos previos para acotar la posible localización de los ceros de f).

***39.** Demostrar que si f es una función dos veces derivable con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f'(0) = f'(1) = 0$, entonces $|f''(x)| \geq 4$ para algún x de $[0, 1]$. En términos más pintorescos: una partícula que recorre una distancia unidad en la unidad tiempo, y empieza y termina con velocidad 0, tiene en algún momento una aceleración ≥ 4. Indicación: Demostrar que o bien $f''(x) > 4$ para algún x de $[0, \frac{1}{2}]$, o bien $f''(x) < -4$ para algún x de $[\frac{1}{2}, 1]$.

40. Supóngase que f es una función tal que $f'(x) = 1/x$ para todo $x > 0$ y $f(1) = 0$. Demostrar que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y > 0$. Indicación: Hallar $g'(x)$ cuando $g(x) = f(xy)$.

***41.** Demostrar que f satisface

$$f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$$

para alguna función g. Demostrar que si f es 0 en dos puntos, entonces f es 0 en el intervalo entre ellos. Indicación: Aplicar el teorema 6.

42. Supóngase que f es n veces derivable y que $f(x) = 0$ para $n + 1$ diferentes valores de x. Demostrar que $f^{(n)}(x) = 0$ para algún x.

43. Sean a_1, ..., a_n puntos arbitrarios de $[a, b]$ y sea

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i).$$

Supóngase que f es derivable $(n + 1)$ veces y que P es un polinomio de grado $\leq n$ tal que $P(x_i) = f(x_i)$ para $i = 1, \ldots, n+1$ (véase pág. 62 y 63). Demostrar que para todo x de $[a, b]$ existe un número c de (a, b) tal que

$$f(x) - P(x) = Q(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Ayuda: Considere la función

$$F(t) = Q(x)[f(t) - P(t)] - Q(t)[f(x) - P(x)].$$

Demostrar que F se anula en $n+2$ puntos distintos de $[a, b]$ y aplicar el problema 42.

29. Demostrar que

$$\tfrac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \tfrac{1}{8}$$

(sin calcular $\sqrt{66}$ con 2 cifras decimales).

45. Demostrar la siguiente ligera generalización del teorema del valor medio: Si f es continua y derivable en (a, b) y $\lim\limits_{y\to a+} f(y)$ y $\lim\limits_{y\to b-} f(y)$ existen, entonces existe algún x en (a, b) tal que

$$f'(x) = \frac{\lim\limits_{y\to b^-} f(y) - \lim\limits_{y\to a^+} f(y)}{b - a}.$$

(La demostración debe empezar: «Esto es una consecuencia trivial del teorema del valor medio porque...»)

46. Demostrar que la conclusión del teorema del valor medio puede escribirse en la forma

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

suponiendo, además, que $g(b) \neq g(a)$ y que $f'(x)$ y $g'(x)$ no se anulan simultáneamente en ningún punto de (a, b).

***47.** Demostrar que si f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), y $g'(x) \neq 0$ para todo x de (a, b), entonces existe algún x en (a, b) con

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(b) - g(x)}.$$

Indicación: Multiplíquese en cruz para ver qué es lo que esto realmente significa.

48. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hôpital?:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

(El límite es, en realidad, -4.)

49. Hallar los siguientes límites

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$.

50. Hallar $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

y $g(0) = g'(0) = 0$ y $g''(0) = 17$.

51. Demostrar las siguientes formas de la regla de L'Hôpital (ninguna de ellas requiere un razonamiento esencialmente nuevo).

(a) Si $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$, y $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)/g'(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x\to a+} f(x)/g(x) = l$ (y análogamente para límites por la izquierda).

(b) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$ (y análogamente para $-\infty$ o si se sustituye $x \to a$ por $x \to a^+$ o $x \to a^-$).

(c) Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)/g'(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = l$ (y análogamente para $-\infty$). Indicación: Considérese $\lim\limits_{x\to 0+} f(1/x)/g(1/x)$.

(d) Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)/g'(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = \infty$.

52. Existe otra forma de la regla de L'Hôpital que exige más manipulaciones algebraicas: Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)/g'(x) = l$, entonces

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = l$. Demostrar esto como sigue:

(a) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un número a tal que

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon \quad \text{para } x > a.$$

Aplicar el teorema del valor medio de Cauchy a f y g sobre $[a, x]$ para demostrar que

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - l\right| < \varepsilon \quad \text{para } x > a.$$

(¿Por qué podemos suponer $g(x) - g(a) \neq 0$?)

(b) Póngase ahora

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(x)}$$

[¿Por qué podemos suponer que $f(x) - f(a) \neq 0$ para x grandes?] y deducir que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < 2\varepsilon \quad \text{para } x \text{ suficientemente grandes.}$$

53. Para completar la orgía de variantes de la regla de L'Hôpital, aplicar el problema 52 para demostrar unos cuantos casos más de la siguiente proposición general (existen tantas posibilidades que el lector debe seleccionar aquellas, si las hay, que sean de su interés):
Si $\lim\limits_{x\to[\,]} f(x) = \lim\limits_{x\to[\,]} g(x) = \{\ \}$ y $\lim\limits_{x\to[\,]} f'(x)/g'(x) = (\ )$, entonces $\lim\limits_{x\to[\,]} f(x)/g(x) = (\ )$.
Aquí [ ] puede ser a o a^+ o a^- o ∞ o $-\infty$, y { } puede ser 0 ó ∞ o $-\infty$, y ( ) puede ser l o ∞ o $-\infty$.

***54.** (a) Supóngase que f es derivable sobre $[a, b]$. Demostrar que si el mínimo de f sobre $[a, b]$ está en a, entonces $f'(a) \geq 0$, y si está en b, entonces $f'(b) \leq 0$. (Se pasará por la mitad de la demostración del teorema 1.)
(b) Supóngase que $f'(a) < 0$ y $f'(b) > 0$. Demostrar que $f'(x) = 0$ para algún x de (a, b). Indicación: Considérese el mínimo de f sobre $[a, b]$; ¿por qué debe estar en algún punto de (a, b)?
(c) Demostrar que si $f'(a) < c < f'(b)$, entonces $f'(x) = c$ para algún x de (a, b). (Este resultado es conocido como teorema de Darboux.) Indicación: Constrúyase una función adecuada a la cual se pueda aplicar la parte (b).

55. Supóngase que f es derivable en un intervalo que contiene a a, pero que f' es discontinua en a.
(a) Los límites laterales $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$ no pueden existir a la vez (Esto no es más que una ligera variante del teorema 7).
(b) Estos límites laterales no pueden existir a la vez ni siquiera en el sentido de ser $+\infty$ o $-\infty$. Ayuda: Aplicar el Teorema de Darboux (problema 54).

***56.** Es fácil encontrar una función f tal que $|f|$ sea derivable sin serlo f. Por ejemplo, podemos elegir $f(x) = 1$ para x racional y $f(x) = -1$ para x irracional. En este ejemplo f ni siquiera es continua, y esto no es tampoco una simple coincidencia: Demostrar que si $|f|$ es derivable en a, y f es continua en a, entonces f es también derivable en a. Indicación: Basta considerar solamente a con $f(a) = 0$. ¿Por qué? En este caso, ¿cómo debe ser $|f|'(a)$?

***57.** (a) Sea $y \neq 0$ y sea n par. Demostrar que $x^n + y^n = (x + y)^n$ solamente cuando $x = 0$. Indicación: Si $x_0{}^n + y^n = (x_0 + y)^n$, aplicar el teorema de Rolle a $f(x) = x^n + y^n - (x + y)^n$ sobre $[0, x_0]$.
(b) Demostrar que si $y \neq 0$ y n es impar, entonces $x^n + y^n = (x + y)^n$ solamente si $x = 0$ ó $x = -y$.

****58.** Aplicar el método del problema 57 para demostrar que si n es par y $f(x) = x^n$, entonces toda tangente a f corta a f solamente una vez.

****59.** Demostrar todavía con más generalidad que si f' es creciente, entonces toda tangente corta a f solamente una vez.

***60.** Supóngase que $f(0) = 0$ y que f' es creciente. Demostrar que la función $g(x) = f(x)/x$ es creciente sobre $(0, \infty)$. Indicación: Evidentemente habrá que fijarse en $g'(x)$. Demostrar que es positiva aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo adecuado (será útil recordar que la hipótesis $f(0) = 0$ es esencial, según se ve en la función $f(x) = 1 + x^2$).

***61.** Utilizar derivadas para demostrar que si $n \geq 1$, entonces

$$(1 + x)^n > 1 + nx \quad \text{para} \quad -1 < x < 0 \quad \text{y} \quad 0 < x.$$

(Obsérvese que la igualdad se cumple para $x = 0$.)

62. Sea $f(x) = x^4 \operatorname{sen}^2 1/x$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$ (figura 32).