FIGURA 16

(La condición «$0 < x - a < \delta$» es equivalente a «$0 < |x - a| < \delta$ y $x > a$».)

Los «límites desde abajo» (figura 17) se definen de manera análoga: $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$ [o $\lim_{x \uparrow a} f(x) = l$] significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < a - x < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

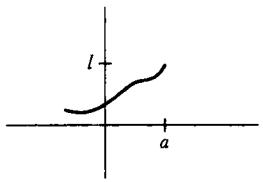

FIGURA 17

Es posible considerar límites desde abajo y desde arriba aunque la función esté definida tanto para valores mayores como para valores menores que a. Así, para la función f de la figura 13, se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$

Constituye un ejercicio fácil (problema 29) demostrar que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe si y sólo si los dos límites $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existen y son iguales.

Lo mismo que las definiciones de límite desde arriba y desde abajo introducidas informalmente en el texto, existen otras modificaciones del concepto de límite que resultan útiles. En el capítulo 4 se dijo que si x es grande, entonces $\operatorname{sen} 1/x$ está cerca de 0. Este resultado se escribe por lo general

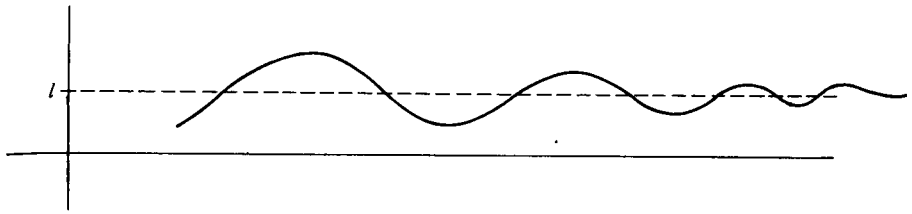

FIGURA 18

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} 1/x = 0.$$

El símbolo $\lim_{x \to \infty} f(x)$ se lee «límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia ∞», o «cuando x se hace infinito», y un límite de la forma $\lim_{x \to \infty} f(x)$ suele llamarse límite en el infinito. La figura 18 ilustra una situación general donde es $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$. Formalmente, $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número N tan grande, que, para todo x,

$$\text{si } x > N, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Debe quedar clara la analogía con la definición de límites ordinarios: mientras la condición «$0 < |x - a| < \delta$» expresa el hecho de que x está cerca de a, la condición «$x > N$» expresa el hecho de que x es grande.

Hemos dedicado tan poco tiempo a los límites desde arriba y desde abajo, así como a los límites en el infinito, porque la idea general que se oculta tras las definiciones debe quedar clara una vez que se ha comprendido la definición de límites ordinarios (que son, con mucho, los más importantes). Sobre estas definiciones se dan muchos ejercicios en los problemas, los cuales contienen también límites de otros tipos que son útiles en ocasiones.

PROBLEMAS

1. Hallar los siguientes límites. (Estos límites se obtienen todos, después de algunos cálculos, de las distintas partes del teorema 2; téngase cuidado en averiguar cuáles son las partes que se aplican, pero sin preocuparse de escribirlas.)

(i) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

(ii) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$.

(iii) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$.

(iv) $\lim_{x\to y} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$.

(v) $\lim_{y\to x} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$.

(vi) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$.

2. Hallar los límites siguientes:

(i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$.

(ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$.

(iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$.

3. En cada uno de los siguientes casos, encontrar un δ tal que, $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$.

(i) $f(x) = x^4$; $l = a^4$.

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = 1$, $l = 1$.

(iii) $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x}$; $a = 1$, $l = 2$.

(iv) $f(x) = \dfrac{x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$; $a = 0$, $l = 0$.

(v) $f(x) = \sqrt{|x|}$; $a = 0$, $l = 0$.

(vi) $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 1$, $l = 1$.

4. Para cada una de las funciones del problema 4-17, decir para qué números a existe el límite $\lim_{x\to a} f(x)$.

***5.** (a) Hágase lo mismo para cada una de las funciones del problema 4-19.
(b) El mismo problema usando decimales infinitos que terminen en una fila de ceros en lugar de los que terminan en una fila de nueves.

6. Supóngase que las funciones f y g tienen la siguiente propiedad: Para todo $\varepsilon > 0$ y todo x,

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \operatorname{sen}^2\left(\frac{\varepsilon^2}{9}\right) + \varepsilon, \text{ entonces } |f(x) - 2| < \varepsilon,$$

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \varepsilon^2, \text{ entonces } |g(x) - 4| < \varepsilon.$$

Para cada $\varepsilon > 0$ hallar un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

(i) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) + g(x) - 6| < \varepsilon$.

(ii) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x)g(x) - 8| < \varepsilon$.

(iii) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{4}\right| < \varepsilon$.

(iv) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

7. Dese un ejemplo de una función f para la cual la siguiente proposición sea *falsa:* Si $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon/2$ cuando $0 < |x - a| < \delta/2$.

8. (a) Si no existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, ¿pueden existir $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ o $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$?

(b) Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$, ¿debe existir $\lim_{x\to a} g(x)$?

(c) Si existe el límite $\lim_{x\to a} f(x)$ y no existe el límite $\lim_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$?

(d) Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$, ¿se sigue de ello que existe $\lim_{x\to a} g(x)$?

9. Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a + h)$. (En este ejercicio se trata principalmente de comprender el significado de los términos.)

10. (a) Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ si y sólo si $\lim_{x\to a} [f(x) - l] = 0$. (Véase primero por qué la proposición es evidente; dar después una demostración rigurosa. En este capítulo la mayor parte de los problemas en los que se

piden demostraciones deben tratarse de la misma manera.)

(b) Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x-a)$.

(c) Demostrar que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.

(d) Dar un ejemplo en el que exista $\lim_{x\to 0} f(x^2)$, pero no $\lim_{x\to 0} f(x)$.

11. Supóngase que existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ cuando $0 < |x-a| < \delta$. Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Dicho de otro modo, $\lim_{x\to a} f(x)$ depende solamente de los valores de $f(x)$ cuando x está cerca de a; este hecho se expresa a veces diciendo que los límites constituyen una «propiedad local». (Será conveniente usar δ', o alguna otra letra, en lugar de δ, en la definición de límites.)

12. (a) Supóngase que $f(x) \leq g(x)$ para todo x. Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$, siempre que estos límites existan.

(b) ¿De qué modo puede obtenerse una hipótesis más débil?

(c) Si $f(x) < g(x)$ para todo x, ¿se sigue de ello necesariamente que $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$?

13. Supóngase que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$. Demostrar que existe $\lim_{x\to a} g(x)$ y que $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$. (Trácese un dibujo.)

***14.** (a) Demostrar que si $\lim_{x\to 0} f(x)/x = l$ y $b \neq 0$, entonces $\lim_{x\to 0} f(bx)/x = bl$. Indicación: Póngase $f(bx)/x = b[f(bx)/bx]$.

(b) ¿Qué ocurre si $b = 0$?

(c) La parte (a) nos permite hallar $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} 2x)/x$ en función de $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x$. Hallar este límite por otro procedimiento.

15. Calcular los límites siguientes en función del número $\alpha = \lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x$.

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$.

(ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$.

(iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{x}$.

(iv) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}$.

(v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

(vi) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x + 2x}{x + x^2}$.

(vii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$.

(viii) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$.

(ix) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$.

(x) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2(3+\operatorname{sen} x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$.

(xi) $\lim_{x\to 1} (x^2-1)^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^3$.

16. (a) Demostrar que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces $\lim_{x\to a} |f|(x) = |l|$.

(b) Demostrar que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$, entonces $\lim_{x\to a} \max(f, g)(x) = \max(l, m)$ y lo mismo para el mínimo.

17. (a) Demostrar que $\lim_{x\to 0} 1/x$ no existe, es decir, demostrar que, cualquiera que sea l, $\lim_{x\to 0} 1/x = l$ es falso.

(b) Demostrar que $\lim_{x\to 1} 1/(x-1)$ no existe.

18. Demostrar que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces existe un número $\delta > 0$ y un número M tal que $|f(x)| < M$ si $0 < |x-a| < \delta$. (¿Cómo puede verse esto gráficamente?) Indicación: ¿Por qué basta con demostrar que $l - 1 < f(x) < l + 1$ para $0 < |x-a| < \delta$?

19. Demostrar que si $f(x) = 0$ para x irracional y $f(x) = 1$ para x racional, entonces no existe $\lim_{x\to a} f(x)$ cualquiera que sea a.

***20.** Demostrar que si $f(x) = x$ para x racional y $f(x) = -x$ para x irracional, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe si $a \neq 0$.

21. (a) Demostrar que si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 0} g(x) \operatorname{sen} 1/x = 0$.

(b) Generalizar este hecho como sigue: Si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ y $|h(x)| \leq M$ para todo x, entonces $\lim_{x\to 0} g(x)h(x) = 0$. [Naturalmente la parte (*a*) es innecesaria si se consigue hacer la parte (b); en realidad la formulación de la

parte (b) puede facilitar las cosas más que (a) y ésta es una de las ventajas de la generalización.]

22. Considérese una función f con la siguiente propiedad: Si g es una función cualquiera para la cual no existe el $\lim_{x\to 0} g(x)$, entonces tampoco existe $\lim_{x\to 0} [f(x) + g(x)]$. Demostrar que esto ocurre si y sólo si $\lim_{x\to 0} f(x)$ *existe*. Indicación: Esto es en realidad muy fácil: La suposición de que no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ lleva inmediatamente a una contradicción si se considera una g con la condición dicha.

****23.** Este problema es el análogo del problema 22 cuando $f + g$ se sustituye por $f \cdot g$. En este caso la situación es considerablemente más compleja y el análisis debe hacerse en varias etapas (el lector que desee un problema difícil puede buscar una solución independiente).

(a) Supóngase que existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y es $\neq 0$. Demostrar que si $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe, entonces tampoco existe $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$.

(b) Demostrar el mismo resultado si $\lim_{x\to 0} |f(x)| = \infty$. (La definición precisa de este tipo de límite se da en el problema 37.)

(c) Demostrar que si no se cumple ninguna de estas dos condiciones, entonces existe una función g tal que $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe, pero existe $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$. Indicación: Considerar por separado los dos casos siguientes: (1) Para algún $\varepsilon > 0$ se tiene $|f(x)| > \varepsilon$ para todos los x suficientemente pequeños. (2) Para todo $\varepsilon > 0$, existen x tan pequeños como se quiera con $|f(x)| < \varepsilon$. En el segundo caso, empiécese por elegir puntos x_n con $|x_n| < 1/n$ y $|f(x_n)| < 1/n$.

***24.** Supóngase que, para todo número natural n, A_n es un conjunto *finito* de números en [0, 1], y que A_n y A_m carecen de elementos comunes si $m \neq n$. Defínase f como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{si } x \text{ está en } A_n \\ 0, & \text{si } x \text{ no está en } A_n \text{ para ningún } n. \end{cases}$$

Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ para todo a de [0, 1].

25. Explíquese por qué son correctas las siguientes definiciones de $\lim_{x\to a} f(x) = l$: Para todo $\delta > 0$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que, para todo x,

(i) Si $0 < |x - a| < \varepsilon$, entonces $|f(x) - l| < \delta$.

(ii) Si $0 < |x - a| < \varepsilon$, entonces $|f(x) - l| \leq \delta$.

(iii) Si $0 < |x - a| < \varepsilon$, entonces $|f(x) - l| < 5\delta$.

(iv) Si $0 < |x - a| < \varepsilon/10$, entonces $|f(x) - l| < \delta$.

***26.** Pónganse ejemplos para demostrar que las siguientes definiciones de $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *no* son correctas.

(a) Para todo $\delta > 0$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|f(x) - l| < \varepsilon$, entonces $0 < |x - a| < \delta$.

27. Para cada una de las funciones del problema 4-17 indíquese para qué números a existen los límites laterales $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

***28.** (a) Hágase lo mismo para cada una de las funciones del problema 4-19.

(b) Considérese también lo que ocurre si se usan decimales que terminan en una fila de ceros en vez de decimales que terminan en nueves.

29. Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$.

30. Demostrar que

(i) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(-x)$.

(ii) $\lim_{x\to 0} f(|x|) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(iii) $\lim_{x\to 0} f(x^2) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(Estas ecuaciones y otras como ellas son susceptibles de diversas interpretaciones. Pueden significar solamente que los dos límites son iguales si es que ambos existen; o que si uno determinado de ellos existe, el otro también existe y es igual a él; o que si cualquiera de los dos existe entonces el otro existe y es igual a él. Decida el lector por sí mismo cuáles de estas interpretaciones son adecuadas.)

***31.** Supóngase que $\lim_{x\to a^-} f(x) < \lim_{x\to a^+} f(x)$. (Ilústrese esta proposición con un dibujo.) Demostrar que existe algún $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(y)$ siempre que $x < a < y$, $|x - a| < \delta$ e $|y - a| < \delta$. ¿Se cumple la recíproca?

***32.** Demostrar que $\lim_{x\to\infty} (a_n x^n + \ldots + a_0)/(b_m x^m + \ldots + b_0)$ existe si y sólo si $m \geq n$. ¿Cuál es el límite cuando $m = n$? ¿Y cuándo $m > n$? Indicación: El límite fácil es $\lim_{x\to\infty} 1/x^k = 0$; consígase mediante alguna manipulación algebraica que ésta sea la única información necesaria.

33. Hallar los límites siguientes

(i) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen}^3 x}{5x+6}$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2+5}$.

(iii) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x$.

(iv) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2(1+\operatorname{sen}^2 x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$.

34. Demostrar que $\lim_{x\to 0^+} f(1/x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$

35. Hallar los límites siguientes en función del número $\alpha = \lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x$.

(i) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

36. Definir "$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$."

(a) Hallar $\lim_{x\to-\infty} (a_n x^n + \cdots + a_0)/(b_m x^m + \cdots + b_0)$.

(b) Demostrar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(-x)$.

(c) Demostrar que $\lim_{x\to 0^-} f(1/x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

37. Definimos $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ en el sentido de que para todo N existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $f(x) > N$. (Trazar un dibujo adecuado.)

(a) Demostrar que $\lim_{x\to 3} 1/(x-3)^2 = \infty$.

(b) Demostrar que si $f(x) > \varepsilon > 0$ para todo x, y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty.$$

38. (a) Definir $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. (O por lo menos convénzase el lector que podría escribir las definiciones si tuviera humor para ello. ¿Cuántos otros símbolos podría definir?)

(b) Demostrar que $\lim_{x\to 0^+} 1/x = \infty$.

(c) Demostrar que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ si y sólo si $\lim_{x\to\infty} f(1/x) = \infty$.

39. Hallar los siguientes límites, si existen

(i) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x-7}{7x^2-x+1}$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} x(1+\operatorname{sen}^2 x)$.

(iii) $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}^2 x$.

(iv) $\lim_{x\to\infty} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

(v) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x} - x$.

(vi) $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$.

(vii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$.

40. (a) Hallar el perímetro de un n-ágono regular inscrito en una circunferencia de radio r; para las funciones trigonométricas que entren en juego, utilizar el radián como argumento.
Solución: $2rn \operatorname{sen}(\pi/n)$.

(b) ¿A qué valor se aproxima este perímetro cuando n es muy grande?

41. Una vez ya en la imprenta el manuscrito de la primera edición de este libro, se me ocurrió una manera mucho más sencilla de demostrar que $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$, y $\lim_{x\to a} x^3 = a^3$, sin pasar por todos los pasos de la página 83. Supongamos que queremos demostrar que $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$, siendo $a > 0$. Dado $\varepsilon > 0$ hacemos simplemente que δ sea el mínimo de $\sqrt{a^2+\varepsilon} - a$ y $a - \sqrt{a^2+\varepsilon}$ (ver figura 19); entonces $|x-a| < \delta$ implica que $\sqrt{a^2-\varepsilon} < x < \sqrt{a^2+\varepsilon}$, de modo que $a^2 - \varepsilon < x^2 < a^2 + \varepsilon$, o $|x^2 - a^2| < \varepsilon$. Por fortuna no llegué a tiempo para introducir estos cambios, puesto que esta «demostración» es totalmente falsa. ¿Dónde se encuentra el fallo?

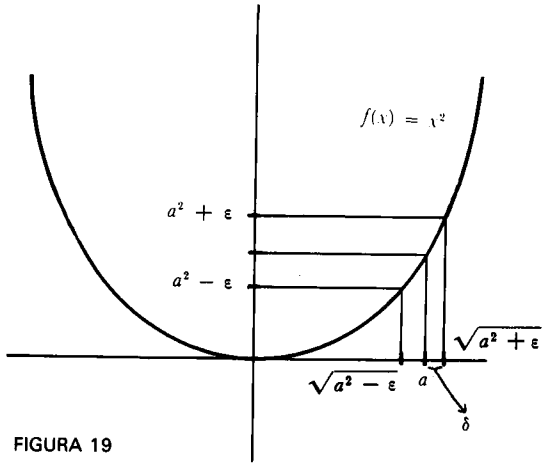
$f(x) = x^2$
$a^2 + \varepsilon$
$a^2 - \varepsilon$
$\sqrt{a^2 + \varepsilon}$
$\sqrt{a^2 - \varepsilon}$
a
δ

FIGURA 19