Cálculo 1,
Agosto 2013 — Enero 2014
Ejercicios 4

1. Investigue si los siguientes conjuntos son o no inductivos:

   (a) $A = \{-5\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$,

   (b) $B = \left\{n \in \mathbb{N} : 1 + +2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 5\right\}$

   (c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} > 0\right\}$,

   (d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} : -2x - 28 < x^2 + 8x\right\}$.

2. Demuestre que si A y B son subconjuntos inductivos de números reales, entonces $A \cap B$ es un conjunto inductivo.

3. Demuestre que:

   (a) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geq 2 \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{N})\,(1 + r = n))$

   (b) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geq 2 \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{N})$

   (c) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(m \in \mathbb{N} \;\wedge\; n < m \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{N})(m = n + r))$

   (d) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(m \in \mathbb{N} \;\wedge\; n < m \Rightarrow m - n \in \mathbb{N})$

4. Demuestre que todo subconjunto de $\mathbb{N}$ no vacío y acotado superiormente tiene un elemento máximo.

5. A continuación se "demuestra" que $(\forall n \in \mathbb{N})(n = n + 1)$.
   "Sea $A = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n = n + 1\}$.
   $1 \in A$ por definición de A.
   Probaremos que para todo $n \in \mathbb{R}$, se tiene que $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$.
   Sea $n \in \mathbb{R}$. Entonces
   $n \in A \Rightarrow n = n+1$ y $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 = n+2$ y $n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1+(n+1)+1$ y $n + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in A$.
   Por lo tanto A es inductivo y como $A \subseteq \mathbb{N}$, por el Principio de Inducción Matemática, se tiene que $A = \mathbb{N}$". ¿En dónde está el error?

6. Demuestre que $1 = \sup\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

7. Demuestre que todo subconjunto acotado de $\mathbb{Z}$ tiene máximo y mínimo.

8. Demuestre que si $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces $\left\{a + b, -b, \frac{1}{b}\right\} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.

9. Demuestre que si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

10. Muestre que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

11. Considere la función f dada por $f(x) = \frac{1}{(1+x)}$. ¿Qué es?

(a) $f(f(x))$, ¿Para qué x esto tiene sentido?
(b) $f(\frac{1}{x})$,
(c) $f(cx)$,
(d) $f(x+y)$,
(e) $f(x)+f(y)$,
(f) ¿Para qué números c hay un número x tal que $f(cx)=f(x)$?
(g) ¿Para qué números c es cierto que $f(cx)=f(x)$ para dos diferentes valores de x?

12. Sean $g(x)=x^2$ y h la función que asigna 1 cuando $x\in\mathbb{Q}$ y 0 de otro modo.

(a) ¿Para cuáles y se tiene que $h(y)\leq y$?
(b) ¿Para cuáles y se tiene que $h(y)\leq g(y)$?
(c) ¿Qué es $g(h(z))-h(z)$?
(d) ¿Para cuáles w se tiene que $g(w)\leq w$?
(e) ¿Para cuáles u se tiene que $g(g(u))=u$?

13. Determinar el dominio máximo de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x)=3x+5$,
(b) $f(x)=\frac{1}{x-4}$,
(c) $f(x)=\frac{1}{(x-8)(x+5)}$,
(d) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x^2-3x-5}}$
(e) $f(x)=\frac{|x|}{x}$

14. ¿Son iguales las funciones $f,g:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ dadas por

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1} \text{ y } g(x)=x+1?$$

15. Sea $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ dada por

$$f(n)=\begin{cases} 2n-1, & \text{si } n \text{ es impar} \\ n, & \text{si } n \text{ es par.}\end{cases}$$

¿Es f una función inyectiva? ¿Por qué?

16. Si $g\circ f$ es una función inyectiva, ¿qué se puede decir de la inyectividad de f y de g?

17. Definamos $f:\mathbb{R}\to(0,1]$ por $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$. ¿Es f sobreyectiva?

18. Si $g\circ f$ es una función sobreyectiva, ¿qué se puede decir de la sobreyectividad de f y de g?