Primer Examen Parcial de Cálculo I

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH

Agosto 2013 - Enero 2014

Nombre completo:____

Correo electrónico:____

Instrucciones: Este examen consta de cinco problemas. De los seis problemas propuestos el estudiante deberá elegir 5; pero los problemas 1 y 6 son obligatorios. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

(1) Determine el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que satisfacen cada una de las siguientes desigualdades:

(a) $|x^2 - 2x + 2| > 0$,

(b) $|x^2 - 2x + 2| > 5$.

Solución: Primero observemos que

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1.$$

Por lo tanto, $|x^2 - 2x + 2| = |(x-1)^2 + 1| \geq 1 > 0$; es decir, todos los $x \in \mathbb{R}$ satisfacen la desigualdad en (a).

Para (b), note que $|(x-1)^2+1| = (x-1)^2+1$ y consecuentemente $|(x-1)^2+1| > 5$ si y sólo si $(x-1)^2 > 4$. Por uno de los resultados expuestos en clase se tiene que esto último pasa si y sólo si o bien $x - 1 > \sqrt{4} = 2$ o $-(x-1) > \sqrt{4} = 2$; es decir, $x > 3$ o $x < -1$. Por lo tanto el conjunto solución para la segunda desigualdad es $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

(2) Suponga que $A \subseteq \mathbb{R}$ y que $B \subseteq \mathbb{R}$ son dos conjuntos inductivos. Demuestre que también $A \cap B$ es un subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$.

Solución: Como A y B son conjuntos inductivos se debe tener que 1 pertenece a ambos conjuntos y así $1 \in A \cap B$.

Ahora si $x \in \mathbb{R}$ es cualquier real tal que $x \in A \cap B$, entonces $x \in A$ y $x \in B$; consecuentemente se tiene que $x + 1 \in A$ al igual que $x+1 \in B$; por eso $x+1 \in A \cap B$. Así demostramos que $A \cap B$ es un conjunto inductivo.

(3) Demuestre que para cualesquiera números reales a y x se tiene que

$$|x| - |a| \leq |x+a|.$$

(Sugerencia: $x = x + a - a$.)
Solución: Como $|x| = |x+a-a|$, usando la Desigualdad del Triángulo obtenemos que $|x| = |x+a-a| \leq |x+a| + |-a|$; o bien que $|x| \leq |x+a| + |a|$. Restando $|a|$ a ambos lados obtenemos que $|x| - |a| \leq |x+a|$.

(4) Demuestre que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(m \in \mathbb{N} \wedge n < m \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{N})(m = n + r)).$$

Solución 1: Definamos $B = \{n \in \mathbb{N} : m \in \mathbb{N} \wedge n < m \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{N})(m = n + r)\}$. Veamos que B es un conjunto inductivo. Como es obvio que $B \subseteq \mathbb{N}$ y sabiendo que $\mathbb{N}$ es el mínimo conjunto inductivo, se sigue que $B = \mathbb{N}$ y por lo tanto que $(\forall n \in \mathbb{N})(m \in \mathbb{N} \wedge n < m \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{N})(m = n + r))$.

Primero $1 \in B$ porque sabemos que si $m \in \mathbb{N}$ y $1 < m$, entonces $2 \leq m$ y en clase demostramos que en este caso $m = 1 + r$ para algún $r \in \mathbb{N}$.

Ahora supongamos que $n \in \mathbb{N}$ es cualquiera y $n \in B$; veamos que $n+1 \in B$. Para esto supongamos que $m \in \mathbb{N}$ y $n+1 < m$. Observe que $2 \leq n+1 < m$ y $m \in \mathbb{N}$; de un ejercicio en la tarea se sigue que $m-1 \in \mathbb{N}$ y $n < m-1$. Puesto que $n \in B$, se sigue que existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que $m - 1 = n + r$; o sea que $m = (n+1) + r$ y esto muestra que $n+1 \in B$. Así concluimos la demostración de que B es inductivo, como se quería.

Solución 2: Formulemos una propiedad (afirmación) sobre números naturales, digamos $P(n)$, definida como "$m \in \mathbb{N} \wedge n < m \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{N})(m = n + r)$". Estamos interesados en demostrar que $(\forall n \in \mathbb{N})(P(n))$. Entonces según el Principio de Inducción, debemos establecer que $P(1)$ es verdadera y que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ si $P(n)$ es verdadera, entonces también $P(n+1)$ lo es.

$P(1)$ es "$m \in \mathbb{N} \wedge 1 < m \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{N})(m = 1 + r)$" que es equivalente a "$m \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq m \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{N})(m = n + r)$". Esto último es cierto puesto que fue demostrado en clase.

Ahora supóngase que $n \in \mathbb{N}$ y que $P(n)$ es cierta; veamos que $P(n+1)$ también es verdadera. Para esto tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $n+1 < m$. Observe que $2 \leq m$ y por otro ejercicio de la tarea se sigue que $m-1 \in \mathbb{N}$ y $n < m-1$. Como $P(n)$ es cierta, sabemos que para algún $r \in \mathbb{N}$ se tiene que $m-1 = n+r$; o equivalentemente que $m = (n+1)+r$, como se quería demostrar.

(5) Demuestre que $1 = \sup\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
Solución: Para $n \in \mathbb{N}$, note que $n-1 < n$ y por lo tanto $\frac{n-1}{n} < 1$; es decir, 1 es cota superior del conjunto. Veamos que 1 es la mínima cota superior. Sea $x < 1$. Por la propiedad arquimediana se sigue hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{1-x}$. Después de una manipulación algebraica (sin mayor importancia) se obtiene que $x - 1 < -\frac{1}{n}$, o bien $x < 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} < 1$. Así ningún $x < 1$ puede ser cota superior de nuestro conjunto.

(6) Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$ dos subconjuntos no vacíos y acotados superiormente. Supóngase que para cada $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $x < y$. Demuéstrese que $\sup A \leq \sup B$.
Solución: De las hipótesis en el ejercicio se sigue con facilidad que los supremos existen. Ahora, basta con demostrar que $\sup B$ es una cota superior de A. Sea $x \in A$, entonces según las condiciones del problema, existe un $y \in B$ tal que $x < y$. Como es claro que $y \leq \sup B$, por transitividad se sigue que $x < \sup B$. Por lo tanto, $\sup B$ es cota superior de A. Dado que $\sup A$ es la mínima cota superior de A se sigue que $\sup A \leq \sup B$.