Cálculo 1,

Agosto 2015 — Enero 2016

Ejercicios 3

1. Investigue si los siguientes conjuntos son o no inductivos:

   (a) $A = \{-5\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$,
   (b) $B = \left\{n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 5\right\}$
   (c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} > 0\right\}$,
   (d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} : -2x - 28 < x^2 + 8x\right\}$.

2. Demuestre que si A y B son subconjuntos inductivos de números reales, entonces $A \cap B$ es un conjunto inductivo.

3. Demuestre que:

   (a) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geq 2 \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{N})\,(1 + r = n))$
   (b) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geq 2 \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{N})$
   (c) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(m \in \mathbb{N}\ \&\ n < m \Rightarrow m - n \in \mathbb{N})$

4. Demuestre que todo subconjunto de $\mathbb{N}$ no vacío y acotado superiormente tiene un elemento máximo.

5. Demuestre que si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a < b$; entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a + n = b$.

6. Pruebe que si $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Z}$ y A está acotado superiormente, entonces A tiene máximo.

7. Pruebe que si $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Z}$ y A está acotado inferiormente, entonces A tiene mínimo.

8. Demuestre que si $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces $\left\{a + b, -b, \frac{1}{b}\right\} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.

9. Demuestre que si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

10. Muestre que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

11. Realice los ejercicios 7, 9, 10 de la sección 3.2 (página 33) de mi libro *Teoría de Conjuntos, una introducción.* Recuerde que en la página del curso Usted puede descargar parte de este libro.

12. Determinar el dominio máximo de cada una de las siguientes funciones:

    (a) $f(x) = 3x + 5$,
    (b) $f(x) = \frac{1}{x-4}$,

(c) $f(x) = \frac{1}{(x-8)(x+5)}$,

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x-5}}$

(e) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

13. ¿Son iguales las funciones $f, g : \mathbb{R} \backslash \{1\} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \text{ y } g(x) = x+1?$$

14. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} 2n-1, & \text{si } n \text{ es impar} \\ n, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

¿Es f una función inyectiva? ¿Por qué?

15. Si $g \circ f$ es una función inyectiva, ¿qué se puede decir de la inyectividad de f y de g?

16. Definamos $f : \mathbb{R} \to (0,1]$ por $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. ¿Es f sobreyectiva?

17. Si $g \circ f$ es una función sobreyectiva, ¿qué se puede decir de la sobreyectividad de f y de g?