Primer Examen Parcial de Cálculo I

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH
Agosto 2015 - Enero 2016

Nombre completo:____

Correo electrónico:____

Instrucciones: Este examen consta de cinco problemas. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

(1) ¿Es inductivo el conjunto $J = \{x \in \mathbb{R} : -8x - 84 < x^2 - 10x\}$.

Solución: Antes de empezar "a dar patadas", observe que

$$\begin{aligned} J &= \{x \in \mathbb{R} : -8x - 84 < x^2 - 10x\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -83 < x^2 - 2x + 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -83 < (x-1)^2\} \\ &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por eso el conjunto J sí es inductivo.

(2) Demuestre por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que si $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, entonces

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Solución: Para $n = 1$ tenemos

$$1 + r = \frac{1 - r^2}{1 - r} = \frac{(1+r)(1-r)}{1 - r} = 1 + r.$$

Ahora si suponemos válido para n, verifiquemos para $n+1$. En efecto,

$$\begin{aligned} 1+r+r^2+\cdots+r^n+r^{n+1} &= (1+r+r^2+\cdots+r^n)+r^{n+1} \\ &= \tfrac{1-r^{n+1}}{1-r}+r^{n+1} \\ &= \tfrac{1-r^{n+1}+r^{n+1}(1-r)}{1-r} \\ &= \tfrac{1-r^{n+2}}{1-r}. \end{aligned}$$

Por el Principio de Inducción comprobamos la veracidad de la expresión.

(3) Si a es un número racional y b es un número irracional, ¿es necesariamente $a+b$ un número irracional? ¿Y si ambos, a y b, son irracionales?

Solución: Si $a+b$ fuera un número racional, como la suma de dos números racionales es un nḿuero racional entonces $b=(a+b)+(-a)$ es también un númuero racional, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, observe que $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son ambos números irracionales pero que $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})$ es un número racional.

(4) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no vacíos y acotados superiormente. Sea

$$S=\{x \in \mathbb{R} : (\exists a \in A)\,(\exists b \in B)\,(x=a+b)\}\,.$$

Demuestre que $\sup S$ existe y que $\sup S = \sup A + \sup B$.

Solución: Como A y B no son vacíos, podemos considerar $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$, para tener que $a_0+b_0 \in S$, por eso $S \neq \emptyset$. El Axioma del Supremo garantiza que A y B tienen supremo. Pongamos $\alpha = \sup A$ y $\beta = \sup B$. Observe que si $x \in S$, entonces $x=a+b$ para algún $a \in A$ y algún $b \in B$. Entonces $x=a+b \leq \alpha+\beta$, con lo que $\alpha+\beta$ es una cota superior de S; por eso S sí tiene supremo.

Veamos que $\alpha+\beta$ es la mínima de las cotas superiores de S. En efecto, sean $\varepsilon>0$ y $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ tales que $\alpha - {}^{\varepsilon}/_{2} < a_1 \leq \alpha$ y $\beta - {}^{\varepsilon}/_{2} < b_1 \leq \beta$. ¿Por qué podemos argumentar con estos a_1 y b_1?

Sumando lado a lado las dos desigualdades tenemos que

$$\alpha+\beta+\varepsilon < a_1+b_1 \leq \alpha+\beta;$$

lo cual establece que $\alpha + \beta$ es la mínima de las cotas superiores para S.

(5) Considere la función real

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

¿Cuál es el dominio máximo de esta función?

Solución: Para conocer el dominio máximo de la función debemos investigar para qué números x tenemos que $x^2 + 2x - 1 \geq 0$ y $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \neq 0$.

Observe que $x^2 + 2x - 1 \geq 0$ es equivalente a $x^2 + 2x + 1 \geq 2$, o bien a $(x+1)^2 \geq 2$; de aquí que debe ser que $x \geq -1 + \sqrt{2}$ o $x \leq -(1 + \sqrt{2})$. Es decir,

$$x \in (-\infty, -(1 + \sqrt{2})) \cup (\sqrt{2} - 1, +\infty).$$

Por otro lado, es fácil (o no tan difícil) notar que $x_0 = -1$ es una raíz de la ecuación $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$; por eso tenemos que $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)(x^2 + 2x + 1)$, o bien que $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$. Por lo tanto, -1 es la única raíz de la ecuación $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$.

Como $-1 \notin (-\infty, -(1 + \sqrt{2})) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$, resulta que el dominio máximo de la función f es

$$(-\infty, -(1 + \sqrt{2})) \cup (\sqrt{2} - 1, +\infty).$$