Segundo Examen Parcial de Cálculo I
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH
Agosto 2015 - Enero 2016

Nombre completo:____

Correo electrónico:____

Instrucciones: Este examen consta de cuatro problemas. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

(2) Considere la sucesión $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $w_1 = 2$ y $w_{n+1} = \sqrt{2w_n - 1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(a) Demuestre que esta sucesión está acotada inferiormente.
Solución: Es fácil observar que todos los términos de la sucesión son positivos, por eso la sucesión es acotada inferiormente.

(b) Demuestre que esta sucesión es decreciente.
Solución: Procederemos por inducción para demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $w_{n+1} \leq w_n$. En efecto, es claro que $\sqrt{3} = w_2 \leq w_1$. Supongamos ahora que para alguna $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $w_{n+1} \leq w_n$; entonces $2w_{n+1} - 1 \leq 2w_n - 1$ y así $w_{n+2} = \sqrt{2w_{n+1} - 1} \leq \sqrt{2w_n - 1} = w_{n+1}$, como se necesitaba demostrar para luego emplear el Principio de Inducción.

(c) Si la sucesión tiene límite, encuéntrelo. Si la sucesión no tiene límite, exponga algunas razones por las que así es.
Solución: Claro que la sucesión tiene límite puesto que es una sucesión decreciente y acotada inferiormente. Sea ℓ el límite de esta sucesión. Entonces

$$\ell = \lim_{n\to\infty} w_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2w_n - 1} = \sqrt{2 \cdot \lim_{n\to\infty} w_n - 1} = \sqrt{2\ell - 1},$$

o bien $\ell^2 - 2l + 1 = 0$; es decir, $(\ell - 1)^2 = 0$. Así $\ell = 1$.

(1) Use la definición de límite de sucesiones para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n}\right) = {}^{1}/_{2}$$

Solución: Debo empezar por ofrecer una disculpa. Cuando decidí seleccionar este ejercicio para el examen hice un esbozo de cómo realizar la demostración, pero de algún modo me equivoqué (cosa que no es extraña en mi) y pensé que las cuentas eran mucho más sencillas de lo que en realidad resultaron. De cualquier modo, era un ejercicio conocido por Ustedes porque era de los ejercicios de la tarea.

Como siempre, empecemos por fijar un $\varepsilon > 0$. Ahora,

$$\begin{aligned}
|\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}\right)-{}^1\!/_2| &= |\tfrac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}\right)-{}^1\!/_2| \\
&= |\tfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}}-{}^1\!/_2| \\
&= |\tfrac{{}^1\!/_n}{\frac{1}{\sqrt{n^2}}}\cdot\tfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}}-{}^1\!/_2| \\
&= |\tfrac{1}{\sqrt{1+{}^2\!/_n}+\sqrt{1+{}^1\!/_n}}-{}^1\!/_2| \\
&= |\tfrac{2-\sqrt{1+{}^2\!/_n}-\sqrt{1+{}^1\!/_n}}{2\sqrt{1+{}^2\!/_n}\;+\;2\sqrt{1+{}^1\!/_n}}| \\
&= \tfrac{\left(\sqrt{1+{}^2\!/_n}+\sqrt{1+{}^1\!/_n}\right)-2}{2\sqrt{1+{}^2\!/_n}\;+\;2\sqrt{1+{}^1\!/_n}} \\
&= \tfrac{1}{2\sqrt{1+{}^2\!/_n}\;+\;2\sqrt{1+{}^1\!/_n}}\cdot\left(\sqrt{1+{}^2\!/_n}-1+\sqrt{1+{}^1\!/_n}-1\right) \\
&\le \sqrt{1+{}^2\!/_n}-1+\sqrt{1+{}^1\!/_n}-1 \\
&= \tfrac{1+{}^2\!/_n-1}{\sqrt{1+{}^2\!/_n}+1}+\tfrac{1+{}^1\!/_n-1}{\sqrt{1+{}^1\!/_n}+1} \\
&= \tfrac{2}{n\left(\sqrt{1+{}^2\!/_n}+1\right)}+\tfrac{1}{n\left(\sqrt{1+{}^1\!/_n}+1\right)} \\
&\le \tfrac{2}{n}+\tfrac{1}{n}\le\tfrac{4}{n}
\end{aligned}$$

Por eso, hace falta escoger $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $n_0 > {}^4\!/_\varepsilon$ para lograr que si $n \ge n_0$ se tenga que $|\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}\right)-{}^1\!/_2| < \varepsilon$. En conclusión, hemos comprobado que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}\right)={}^1\!/_2.$$

(3) Supóngase que $0 < x \le y$ y encuentre

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^n+y^n}{6}\right)^{1/n}.$$

Solución: Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\frac{y^n}{6} \leq \frac{x^n + y^n}{6} \leq \frac{2y^n}{6}$$

y así

$$y \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{6}} \leq \sqrt[n]{\frac{x^n + y^n}{6}} \leq y \cdot \sqrt[n]{\frac{2}{6}};$$

también recuerde que en clase se demostró que para $z \in \mathbb{R}^+$ se tiene que $\sqrt[n]{z} \to 1$. Por lo tanto, al tomar límites en las desigualdades anteriores nos lleva a que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^n + y^n}{6} \right)^{1/n} = y.$$

(4) Demuestre que la sucesión $(\frac{n!}{n^n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a cero. (Sugerencia: Use el hecho de que para $1 < k \leq n$ se tiene que $k/n \leq 1$.)
Solución: Que dicha sucesión converge a cero se sigue de las siguientes desigualdades (en las que se ha empleado la sugerencia),

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}.$$