2

Axiomas de la Teoría de Conjuntos

2.1 Propiedades

Comúnmente los conjuntos son introducidos como colecciones de objetos con alguna propiedad común. La noción de propiedad merece un poco de análisis. Algunas propiedades frecuentemente consideradas en la vida diaria son tan vagas que difícilmente son admitidas en las matemáticas. Consideremos, por ejemplo, el "conjunto de todos los borregos gordos"; cabe preguntar ¿qué tan *gordo* es gordo? Si nos muestran algún borrego ¿cómo podemos saber si es gordo o no?

Como otro ejemplo, consideremos el "conjunto" de aquellos números naturales que pueden ser escritos (digamos que con papel y lápiz) en notación decimal. Claramente 0 puede ser escrito. Si un número n puede ser escrito, entonces seguramente el número $n+1$ también puede ser escrito. Por el familiar principio de inducción, cualquier número n puede ser escrito. Pero, ¿conoce o conocerá usted de alguien que pueda escribir el número $10^{10^{10}}$? Este número en notación decimal requiere de un 1 y 10^{10} ceros, que para lograr escribirse requiere de al menos trescientos años de trabajo continuo anotando un cero por segundo.

El problema para admitir a estas propiedades como "buenas" propiedades para definir conjuntos es causado por el significado vago de "puede". Una forma de remediar este tipo de dificultades o algunas otras similares es decir explícitamente qué significa "puede" o ponernos de acuerdo en qué significa "gordo"; por ejemplo, estableciendo que gordo es pesar más de cien kilogramos. Sin embargo, el determinar los elementos de un conjunto sabiendo que son los que satisfacen cierta propiedad, sigue siendo complicado. Para ilustrar esta afirmación, construiremos un "conjunto" en el que será más difícil ponerse de acuerdo en un criterio que permita definir bien el conjunto.

> Se cuenta que en un lejano poblado de un antiguo emirato había un barbero llamado As-Samet, *ducho en afeitar cabezas y barbas, maestro en escamondar sanguijuelas.* Un día el Emir, dándose cuenta de la escasez de barberos en el emirato, dio órdenes de que

> todos los barberos del emirato sólo afeitaran a aquellas personas que no pudieran hacerlo por sí mismas (todas las personas en este pueblo tienen que ser afeitadas, ya sea por el barbero o por ellas mismas). Un cierto día el barbero fue llamado a afeitar al Emir y le contó a éste sus congojas.
>
> — En mi pueblo soy el único barbero. Si me afeito, entonces puedo afeitarme por mí mismo y por lo tanto, no debería afeitarme el barbero de mi pueblo ¡que soy yo! Pero si no me afeito, lo debe hacer un barbero por mí ¡pero no hay allí más barbero que yo!
>
> El Emir pensó que tales razonamientos eran muy profundos, a tal grado que premió al barbero con la mano de la más virtuosa de sus hijas, y el barbero vivió eternamente feliz.

Consideremos como $\mathbf{P}(x)$ la propiedad "el habitante x del pueblo no se afeita a sí mismo (y, por tanto, es afeitado por el barbero)". Sea b el barbero. La cuestión es: ¿b tiene o no la propiedad?, es decir, ¿$\mathbf{P}(b)$ se verifica o no? Si b tiene la propiedad, entonces b no se afeita a sí mismo y es afeitado por el barbero. Pero b es el barbero, así que se afeita a sí mismo. Esto significa que b no tiene la propiedad. Si b no tiene la propiedad, entonces b se afeita a sí mismo y por lo tanto, no es afeitado por el barbero. Como b es el barbero, entonces b no se afeita a sí mismo, así que tiene la propiedad. En conclusión, no sabemos si b tiene o no la propiedad, pues la propiedad $\mathbf{P}(b)$ es cierta y falsa a la vez, es una paradoja, frecuentemente conocida como la paradoja del barbero.

Las propiedades anteriores y otras similares no definen conjuntos; esto es, todos los objetos que gozan de la propiedad no pueden ser coleccionados en un conjunto. Esta observación nos puede llevar a preguntar ¿qué propiedades sí definen conjuntos?. Desafortunadamente, no hay manera de conocer esto, y algunos resultados de lógica, especialmente el llamado Teorema de Incompletitud de Gödel, indican que una respuesta plena es imposible.

Para nosotros, *una propiedad es una proposición tal que para cualquier objeto es posible decidir, sin ambigüedad, si dicho objeto la verifica.* Si un objeto x verifica la propiedad $\mathbf{P}(x)$ decimos que la propiedad es verdadera (V); en caso contrario decimos que la propiedad es falsa (F). Cuando $\mathbf{P}(x)$ es verdadera también decimos que el objeto x tiene la propiedad $\mathbf{P}(x)$.

Desde propiedades arbitrarias $\mathbf{P}(x)$ y $\mathbf{Q}(x)$, podemos formar nuevas propiedades: la conjunción $\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)$, la disyunción $\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)$ y la negación de $\mathbf{P}(x)$, $\neg\mathbf{P}(x)$. En cuanto al significado de estas nuevas propiedades generadas por $\mathbf{P}(x)$ y $\mathbf{Q}(x)$ tenemos que: Para que un objeto x verifique la conjunción es necesario que x verifique simultáneamente a cada una de las propiedades que la componen; para que x verifique la disyunción es necesario que x verifique por lo menos una de sus componentes, y para que x verifique la negación de $\mathbf{P}(x)$ es necesario que x no verifique $\mathbf{P}(x)$. Los valores de verdad de estas propiedades pueden ser resumidos por la Tabla 1.

Tabla 1

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \wedge Q(x)$	$P(x) \vee Q(x)$	$\neg P(x)$
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

La propiedad $\neg(\mathbf{P}(x) \wedge \neg\mathbf{Q}(x))$ se abrevia como $\mathbf{P}(x) \Rightarrow \mathbf{Q}(x)$. La propiedad $[\mathbf{P}(x) \Rightarrow \mathbf{Q}(x)] \wedge [\mathbf{Q}(x) \Rightarrow \mathbf{P}(x)]$ se abrevia como $\mathbf{P}(x) \Leftrightarrow \mathbf{Q}(x)$. En la Tabla 2 se exponen los valores de verdad de estas propiedades en términos de los valores de verdad de sus componentes.

Tabla 2

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \Rightarrow Q(x)$	$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Una cuantificación existencial es una propiedad de la forma $\exists x\, \mathbf{P}(x)$, donde $\mathbf{P}(x)$ es una propiedad cualquiera conocida como cuantificado y $\exists$ es el cuantificador existencial. La propiedad $\exists x\, \mathbf{P}(x)$ es verdadera si $\mathbf{P}(x)$ es verdadera para al menos un objeto x; de otro modo es falsa. La propiedad $\forall x\, \mathbf{P}(x)$, conocida como cuantificación universal, es una abreviación de la propiedad $\neg(\exists x)\,(\neg\mathbf{P}(x))$.

Abreviaremos con $\forall x \in X,\ \mathbf{P}(x)$ la propiedad $\forall x\,(x \in X \Rightarrow \mathbf{P}(x))$ y denotaremos por $\exists x \in X,\ \mathbf{P}(x)$ a la propiedad $\exists x\,(x \in X \wedge \mathbf{P}(x))$.

Una propiedad puede depender de más de un parámetro. Una propiedad del estilo $\mathbf{P}(x, y, \ldots z)$ tiene varios parámetros (una cantidad finita), y su valor de verdad depende de todos los parámetros.

2.2 Los Axiomas

Como se aseguró en la introducción, el enfoque adoptado para el desarrollo de la Teoría de Conjuntos será axiomático y la manera de realizar esta axiomática será parecida a aquella de la Geometría. Es decir, en nuestra axiomática no examinaremos directamente el significado del término "*conjunto*" —tal y como en Geometría no se examinan los significados de los términos "punto", "recta" y "plano"—; pero a partir de sus axiomas —al igual que en Geometría— se deducen todos los teoremas sin recurrir a los significados intuitivos de los términos primitivos.

Los axiomas tienen su origen en el concepto intuitivo de conjunto, pero el método axiomático asegura que el concepto intuitivo de la palabra "conjunto" no interviene en las demostraciones de teoremas o en definiciones de conceptos conjuntistas.

Las nociones primitivas de la Teoría de Conjuntos son "conjunto", y la relación de pertenencia "ser un elemento de", la cual se simbolizará por $\in$; su negación: x no es un elemento o miembro de y la denotamos con $x \notin y$.[1] Para simplificar la notación usaremos letras mayúsculas para referirnos a conjuntos. En ocasiones (cuando sea posible) indicaremos la jerarquía de un conjunto denotándolo con letras caligráficas.

Ahora empezaremos a dar nuestro sistema axiomático. Intentaremos aclarar el significado intuitivo de cada axioma.

Para dar sustancia a la discusión, el primer axioma que adoptaremos postula que al menos existe un conjunto. Para concretar, postularemos la existencia de un conjunto específico, a saber, el conjunto vacío. Ya que más adelante formularemos una suposición de existencia más profunda y más útil, la siguiente juega sólo un papel temporal.

Axioma 1 (de Existencia) *Hay un conjunto que no tiene elementos.*

Un conjunto sin elementos puede ser descrito de manera intuitiva de varias formas; por ejemplo, como "el conjunto de los perros que han escrito obras literarias" o como "el conjunto de números reales que satisfacen la ecuación $x^2 + 1 = 0$". Intuitivamente los ejemplos de esta clase describen al mismo conjunto, a saber, el conjunto vacío, conjunto vacuo. Pero no podemos probar esta afirmación; necesitamos otro axioma que exprese el hecho de que un conjunto está determinado por sus elementos, tal y como intuitivamente lo concebimos.

Axioma 2 (de Extensión) *Si todo elemento de X es un elemento de Y, y todo elemento de Y es un elemento de X, entonces $X = Y$.*

---

[1] El símbolo $\in$ se deriva de la letra griega épsilon. El uso de esta letra para la relación de pertenencia fue introducido por Peano [P$_2$] quien la seleccionó como abreviación de la palabra Griega estar ($\grave{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$)

El Axioma de Extensión puede expresarse en otras palabras diciendo: dos conjuntos que tienen los mismos elementos son idénticos. Simbólicamente este axioma puede expresarse así:

$$X = Y \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x : x \in X \ \Rightarrow \ x \in Y) \ \wedge \ (\forall x : x \in Y \ \Rightarrow \ x \in X).$$

Por otra parte, es valioso comprender que el *Axioma de Extensión no es sólo una propiedad lógicamente necesaria de la igualdad, sino que es una proposición no trivial acerca de la pertenencia*. Una manera de llegar a entender este punto es considerar una situación en la cual el análogo al Axioma de Extensión no se cumpla. Supóngase, por ejemplo, que consideramos seres humanos como (en lugar de) conjuntos y que, si x y A son seres humanos, escribiremos $x \in A$ siempre que x es un ancestro de A (por ejemplo, $x \in A$ si x es padre de A o si x es bisabuelo de A). El análogo del Axioma de Extensión diría en este caso que “dos seres humanos tienen los mismos ancestros si y sólo si son iguales”. Pero, ¿qué pasa con dos hermanos?

Proposición 2.1 *Hay un único conjunto que no tiene elementos.*

DEMOSTRACIÓN:

Asumamos que A y B no tienen elementos. Entonces todo elemento de A es un elemento de B (puesto que A no tiene elementos la proposición “$a \in A \Rightarrow a \in B$” es automáticamente cierta). Similarmente, todo elemento de B es un elemento de A. Por el Axioma de Extensión concluimos que $A = B$. ■

La proposición anterior nos posibilita para hacer la siguiente definición.

Definición 2.2 El único conjunto que no tiene elementos es llamado el *conjunto vacío* y es denotado por $\emptyset$.

Intuitivamente, los conjuntos son colecciones de objetos que satisfacen alguna propiedad, y sería deseable tener un axioma que exprese este hecho. Este axioma retomaría el espíritu de la “definición” de conjunto dada por Cantor. El problema es que no toda propiedad describe un conjunto, pues algunas propiedades pueden introducir paradojas y nuestra intención al axiomatizar la Teoría de Conjuntos es precisamente evitar las paradojas. En seguida demostraremos que la colección $\{x : x \text{ es un conjunto}\}$ no es un conjunto, es decir, la propiedad $\mathbf{P}(x)$: “x es un conjunto”, no describe en realidad un conjunto.

El problema estará resuelto si postulamos solamente la existencia del conjunto de todos los objetos que tienen una propiedad dada, los cuales pertenezcan a otro conjunto ya dado de antemano. El siguiente axioma puede considerarse como de los más importantes, pues permite la construcción de nuevos conjuntos a partir de otros ya existentes.

Axioma 3 (Esquema de Comprensión) *Sea* $\mathbf{P}(x)$ *una propiedad de* x*. Para cualquier conjunto* A *hay un conjunto* B *tal que* $x \in B$ *si y sólo si* $x \in A$ *y* $\mathbf{P}(x)$.

En contraste a los otros axiomas, los cuales son proposiciones, el Axioma Esquema de Comprensión es una colección infinita de proposiciones. Esto es, éste es un esquema para producir axiomas, uno por cada elección de la propiedad $\mathbf{P}$. Por ejemplo, si $\mathbf{P}(x)$ es "$x = x$" el axioma dice: Para cualquier conjunto A, hay un conjunto B tal que $x \in B$ si y sólo si $x \in A$ y $x = x$. (En este caso $A = B$). Si $\mathbf{P}(x)$ es "$x \notin x$", el axioma postula: Para cualquier conjunto A hay un conjunto B tal que $x \in B$ si y sólo si $x \in A$ y $x \notin x$. Por lo anterior el Axioma 3 se llama *Esquema de Comprensión*.

La propiedad $\mathbf{P}(x)$ puede depender de otras variables $p, q, \ldots, r$; el correspondiente axioma postula entonces que para cualquier selección de las variables $p, q, \ldots, r$, y cualquier conjunto A, hay un conjunto B (que depende de $p, q, \ldots, r$ y A) que consiste exactamente de los elementos de A para los cuales se verifica $\mathbf{P}(x, p, q, \ldots, r)$.

Ejemplo 2.3 Si P y Q son conjuntos, entonces hay un conjunto R tal que $x \in R$ si y sólo si $x \in P$ y $x \in Q$.

Demostración:

Considérese la propiedad $\mathbf{P}(x, Q)$ de x y Q: "$x \in Q$". Entonces por el Axioma Esquema de Comprensión, para todo Q y cualquier P hay un conjunto R tal que $x \in R$ si y sólo si $x \in P$ y $\mathbf{P}(x, Q)$, es decir, si y sólo si $x \in P$ y $x \in Q$. ■

Ejemplo 2.4 El conjunto de todos los conjuntos no existe.

Demostración:

Supongamos lo contrario, sea $\mathcal{U}$ el conjunto de todos los conjuntos y consideremos la propiedad $\mathbf{P}(x)$: "$x \notin x$". El Axioma 3 nos dice que existe un conjunto R tal que $x \in R$ si y sólo si $x \in \mathcal{U}$ y $x \notin x$; o sea, x es un elemento de R si y sólo si x es un conjunto y x no es miembro de sí mismo. Como R es un conjunto entonces $R \in \mathcal{U}$, así entonces R puede o no verificar la propiedad $\mathbf{P}$. Si $R \notin R$ entonces $R \in R$, es decir, $(R \notin R) \wedge (R \in R)$, una contradicción.

Por otro lado, si $R \in R$ entonces R sí verifica la propiedad $\mathbf{P}$, es decir, $R \notin R$, nuevamente $(R \in R) \wedge (R \notin R)$, una contradicción. Por lo tanto, suponer la existencia de $\mathcal{U}$ y considerar la propiedad legítima $\mathbf{P}$ siempre lleva a una contradicción, concluimos que no existe tal conjunto $\mathcal{U}$. ■

Nótese que de hecho $\mathcal{U}$ mismo no es esencial para el razonamiento anterior. En efecto, si en lugar de $\mathcal{U}$ tomáramos otro conjunto cualquiera X y razonamos por medio del Axioma Esquema de Comprensión de la misma manera que en la demostración anterior, tendríamos que concluir que $R \notin X$. Esta deducción es interesante, pues nos permite decir que hay algo (es decir, R) que no pertenece a X. Como el conjunto X en este razonamiento es arbitrario, hemos demostrado que *no hay un conjunto que contenga todo*, o bien que *no hay un universo*. "Universo" se usa aquí en el sentido de "universo de discurso", lo cual significa, en cualquier discusión particular, un conjunto que contiene a todos los objetos que intervienen en ese estudio. En tratamientos más antiguos (preaxiomáticos) a la Teoría de Conjuntos, se daba por supuesta la existencia de un universo.

El razonamiento del Ejemplo 2.4 se conoce como *la Paradoja de Russell*[2] y en la literatura toma muchas formas equivalentes a la que hemos planteado aquí. La moraleja es que es imposible, especialmente en matemáticas, obtener algo a partir de nada. *Para especificar un conjunto no basta dar una propiedad; es necesario también disponer de un conjunto a cuyos elementos pueda aplicarse esa propiedad.* Esta es la limitación impuesta por el Axioma 3; la manera de suprimir las dificultades que surgen al definir "conjuntos muy grandes" es proceder a la inversa, garantizando por medio de axiomas la existencia de conjuntos mínimos y la obtención de nuevos conjuntos a partir de los ya existentes.

En capítulos posteriores tendremos la oportunidad de conocer otras colecciones (distintas de $\mathcal{U}$, la colección de todos los conjuntos) que no son conjuntos; pero nos permitimos hacer la siguiente:

Convención 2.5 Si $\mathbf{P}(x)$ es una propiedad de *x,* a

$$\mathbf{K} = \langle x : x \textit{ es un conjunto y } \mathbf{P}(x) \rangle$$

le llamaremos clase*.*

Debe quedar claro que no se está definiendo lo que es una clase, la convención anterior nos facilitará más adelante referirnos a ciertas colecciones. La

[2] En 1903 fue publicada por primera vez la Paradoja de Russell, en el apéndice de [F_4].

discusión anterior también nos dice que una clase *no necesariamente* es un conjunto. La diferencia entre estos dos conceptos originó parte de los problemas lógicos de Cantor.

Lema 2.6 *Sea* $\mathbf{P}(x)$ *una propiedad de* x*. Para todo* A *hay un único conjunto* B *tal que* $x \in B$ *si y sólo si* $x \in A$ *y* $\mathbf{P}(x)$*.*

DEMOSTRACIÓN:

Si B' es un conjunto tal que $x \in B'$ si y sólo si $x \in A$ y $\mathbf{P}(x)$, entonces $x \in B$ si y sólo si $x \in B'$. Así, $B = B'$ por el Axioma de Extensión. ■

Ahora tenemos derecho de hacer la siguiente definición que provee de una notación al conjunto B unívocamente determinado.

Definición 2.7 $\{x \in A : \mathbf{P}(x)\}$ es el conjunto de todos los $x \in A$ con la propiedad $\mathbf{P}(x)$.

Nuestro sistema axiomático hasta este momento no es muy poderoso; el único conjunto cuya existencia postulamos es el conjunto vacío, y las aplicaciones del Esquema de Comprensión a éste, producen nuevamente el conjunto vacío: para cualquier propiedad $\mathbf{P}(x)$, $\{x \in \emptyset : \mathbf{P}(x)\} = \emptyset$. Los siguientes tres axiomas postulan que algunos de los procedimientos frecuentemente usados en matemáticas producen conjuntos.

Axioma 4 (del Par) *Para cualesquiera* a *y* b *hay un conjunto* C *tal que* $x \in C$ *si y sólo si* $x = a$ *o* $x = b$*.*

Así, $a \in C$ y $b \in C$, y no hay otros elementos en C. Por el Axioma de Extensión el conjunto C es único. Definimos el *par no ordenado* de a y b como el conjunto que tiene a a y a b como elementos, y lo denotamos por $\{a, b\}$. Podemos formar el par no ordenado $\{a, a\}$ el cual se denota simplemente por $\{a\}$, y se llama conjunto *singular* o *unitario* de a.

El Axioma del Par asegura que todo conjunto es un elemento de algún conjunto, y dos conjuntos cualesquiera son simultáneamente elementos de algún mismo conjunto.

Ejemplo 2.8 Sean $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$, entonces $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$ es un conjunto tal que $\emptyset \in \{\emptyset\}$. Note que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, puesto que $\emptyset$ no tiene elementos y $\{\emptyset\}$ tiene un elemento.

Ejemplo 2.9 Sean $A = \emptyset$ *y* $B = \{\emptyset\}$. Entonces $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ *y* $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; además, $\emptyset$ *y* $\{\emptyset\}$ son los únicos elementos de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Note que $\emptyset \neq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y $\{\emptyset\} \neq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Ejemplo 2.10 Sean $A = \{\emptyset\}$ y $B = \{\emptyset\}$, entonces $\emptyset \in \{\emptyset\}$ y $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$. Pero $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$, ya que el único elemento del conjunto $\{\{\emptyset\}\}$ es $\{\emptyset\}$, y por el Ejemplo 2.8, $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Del ejemplo anterior podemos deducir que $\emptyset \neq \{\{\emptyset\}\}$ y que $\{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$, lo cual nos permite inferir la existencia de muchísimos conjuntos singulares como: $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, $\ldots, \{\cdots\{\{\emptyset\}\}\cdots\}$, o bien pares no ordenados como $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc. Sin embargo, una pregunta interesante es: ¿Son realmente distintos estos conjuntos? La respuesta se deja como un ejercicio, aquí únicamente notaremos que no debemos confundir los conjuntos de un solo elemento con el elemento propiamente dicho. No es cierto que x y $\{x\}$ sean iguales, lo cual puede confirmarse observando que $\{x\}$ sólo tiene un miembro, a saber x; mientras que x puede tener cualquier número de miembros. Véase el Ejemplo 2.8 y más adelante el Teorema 2.33 para derivar razones más convincentes.

Si A y B son conjuntos, es deseable reunir a sus elementos en un solo conjunto. Este conjunto es diferente del que se construyó con el Axioma 4: mientras que los elementos del par no ordenado son los conjuntos A y B, nuestro nuevo conjunto tendrá por elementos a los elementos de A y B (ver Ejemplo 2.15).

Axioma 5 (de Unión) *Para cualquier conjunto S, existe un conjunto U tal que $x \in U$ si y sólo si $x \in X$ para algún $X \in S$.*

Nuevamente el conjunto U es único. Éste es llamado *unión* de S y denotado por $\bigcup S$. Decimos que S es un *sistema de conjuntos o familia de conjuntos* cuando queremos hacer énfasis en que los elementos de S son conjuntos. La unión de una familia de conjuntos S es entonces el conjunto de, precisamente, todos los x que pertenecen a algún conjunto que forma parte de la familia S.

Ejemplo 2.11 Sea $S = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; entonces $x \in \bigcup S$ si y sólo si $x \in A$ para algún $A \in S$, *es decir*, si y sólo si $x \in \emptyset$ o $x \in \{\emptyset\}$. Por lo tanto, $x \in \bigcup S$ si y sólo si $x = \emptyset$; o sea, $\bigcup S = \{\emptyset\}$.

Ejemplo 2.12 $\bigcup \emptyset = \emptyset$

Ejemplo 2.13 Sean A y B conjuntos, $x \in \bigcup\{A, B\}$ si y sólo si $x \in A$ o $x \in B$. El conjunto $\bigcup\{A, B\}$ es llamado la unión de A *y* B y es denotado por $A \cup B$.

Obsérvese que el Axioma del Par y el Axioma de Unión son necesarios para definir la unión de dos conjuntos, y el Axioma de Extensión es necesario para garantizar la unicidad. Además nótese que la unión de dos conjuntos tiene el significado usual:

$$x \in A \cup B \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in A \quad \vee \quad x \in B.$$

Ejemplo 2.14 $\{\{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Ejemplo 2.15 Si $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y $B = \{\{\{\emptyset\}\}\}$, entonces el par no ordenado de A y B es distinto de $A \cup B$.

El Axioma de Unión es muy poderoso; éste nos capacita no sólo para formar uniones de dos conjuntos, sino también para formar la unión de un número infinito de conjuntos (más tarde se aclarará tal situación).[3]

Dados a, b y c, puede probarse la unicidad del conjunto P cuyos elementos son exactamente a, b y c, en efecto $P = \{a, b\} \cup \{c\}$. P es denotado por $\{a, b, c\}$ y se llama *terna no ordenada* de a, b y c. Análogamente puede definirse una cuarteta, quinteta, sexteta no ordenada, etc.

Ahora introduciremos un concepto simple y familiar para el lector.

Definición 2.16 A es un *subconjunto* de B si cualquier elemento de A pertenece a B. En otras palabras, A es un subconjunto de B si, para todo x, $x \in A$ implica $x \in B$. Escribiremos $A \subseteq B$ o $B \supseteq A$ para denotar que A es subconjunto de B.

Ejemplo 2.17 $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Ejemplo 2.18 $x \in A$ si y sólo si $\{x\} \subseteq A$.

Según la Definición 2.16, todo conjunto debe considerarse subconjunto de sí mismo.

Ejemplo 2.19 $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$ para todo conjunto A.

Ejemplo 2.20 Para cualesquiera conjuntos A, B y C tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ se tiene que $A \subseteq C$.

El Axioma Esquema de Comprensión puede ahora interpretarse como un axioma que nos permite la formación de subconjuntos.

Ejemplo 2.21 $\{x \in A : \mathbf{P}(x)\} \subseteq A$.

---

[3] Las nociones de finito e infinito serán formalizadas posteriormente, por el momento las emplearemos en forma intuitiva.

Ejemplo 2.22 Si $A \in S$ entonces $A \subseteq \bigcup S$.

Si A y B son dos conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces A y B tienen los mismos elementos y, por lo tanto, en virtud del Axioma de Extensión, $A = B$. De hecho el Axioma de Extensión puede ser formulado en estos términos: Si A y B son dos conjuntos, una condición necesaria y suficiente para que $A = B$ es que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ simultáneamente. Por lo anterior, casi todas las demostraciones de igualdad entre dos conjuntos A y B están divididas en dos partes, hacer ver primero que $A \subseteq B$ y mostrar después que $B \subseteq A$.

Obsérvese que la pertenencia ($\in$) y la contención ($\subseteq$)[4] son, conceptualmente, cosas muy diferentes. Una diferencia importante es la que manifiesta el Ejemplo 2.19 al mostrarnos que para cualquier conjunto A, $A \subseteq A$ mientras que no está del todo claro que cualquier conjunto A, $A \in A$. Indudablemente que esto último no es posible para cualquier conjunto razonable, de hecho $\emptyset \notin \emptyset$ y por ende $\subseteq$ es reflexiva pero $\in$ no lo es. Sin embargo, no podremos demostrar que para cualquier conjunto A, $A \notin A$, hasta que introduzcamos el Axioma de Fundación. Otra diferencia entre $\in$ y $\subseteq$ la podemos derivar de los Ejemplos 2.10 y 2.20 como sigue: $\emptyset \in \{\emptyset\}$ y $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$ pero $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$, es decir, la pertenencia ($\in$) a diferencia de la contención ($\subseteq$) no tiene carácter transitivo.

Ahora introducimos el siguiente axioma, el cual nos asegura que dado un conjunto cualquiera podemos formar un nuevo conjunto cuyos miembros son exactamente los subconjuntos del conjunto dado; en forma precisa:

Axioma 6 (del Conjunto Potencia) *Para cualquier conjunto X existe un conjunto S tal que $A \in S$ si y sólo si $A \subseteq X$.*

Puesto que el conjunto S está unívocamente determinado, llamamos al conjunto S de todos los subconjuntos de X, el *conjunto potencia* de X y es denotado por $\mathcal{P}(X)$.

Ejemplo 2.23 $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Ejemplo 2.24 $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

Ejemplo 2.25 $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Ejemplo 2.26 Para cualquier conjunto X, siempre $\emptyset, X \in \mathcal{P}(X)$. En particular siempre se cumple $\mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ para cualquier X.

Ejemplo 2.27 Si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

[4] El crédito de la distinción entre pertenencia y contención se da generalmente a Peano, quien introdujo diferentes notaciones para los dos conceptos.

Ejemplo 2.28 Si $X = \{\emptyset, a, b, \{a\}\}$ y $A = \{a\} \subseteq X$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq X$.

Ejemplo 2.29 Si $X = \{\emptyset, a, b\}$ y $A = \{a\}$ entonces $\mathcal{P}(A) \nsubseteq X$.

A continuación responderemos la pregunta: ¿Para algún conjunto X puede ocurrir que $X \in X$? Para conjuntos "razonables" que a uno se le puedan ocurrir la respuesta es indudablemente no, pero en realidad esta pregunta no puede ser respondida sin el siguiente axioma.

Axioma 7 (de Fundación) *En cada conjunto no vacío A existe $u \in A$ tal que u y A no tienen elementos en común, es decir, para cualquier x, si $x \in A$ entonces $x \notin u$.*

Este axioma también se conoce como Axioma de Regularidad y postula que "conjuntos" de cierto tipo no existen. Esta restricción no es contradictoria (es decir, el axioma es consistente con los otros axiomas) y es irrelevante para el desarrollo de los números naturales, reales, cardinales u ordinales; y de hecho para casi todas las matemáticas ordinarias. Sin embargo, es extremadamente útil en las matemáticas de la Teoría de Conjuntos, para la Construcción de Modelos.[5] En [A_1] se desarrolla una Teoría de Conjuntos con la negación del Axioma de Fundación.

Ejemplo 2.30 Si $A = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ entonces $u = \{\emptyset\}$ y A no tienen elementos en común.

Ejemplo 2.31 Si $A = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$ entonces $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ y A tienen a $\{\{\emptyset\}\}$ como elemento común. También $\{\{\emptyset\}\}$ y A tienen a $\{\emptyset\}$ como elemento común, pero $\{\emptyset\}$ y A no tienen elementos comunes.

Ejemplo 2.32 Si $\emptyset \in A$ entonces tomando a $u = \emptyset$ tenemos que u y A no tienen elementos comunes.

Teorema 2.33 *(a) Ningún conjunto no vacío puede ser elemento de sí mismo, es decir, para cualquier $X \neq \emptyset$, $X \notin X$.*

(b) Si A y B son conjuntos no vacíos, entonces no es posible que ocurran simultáneamente $A \in B$ y $B \in A$.

[5] En 1994 H. Andréka, I. Németi y Á. Kurucz demostraron que el Axioma de Fundación es necesario para derivar un importante teorema del Álgebra Universal como es el Teorema de Variedad de Birkhoff. [AKN]

Demostración:

(a) Supongamos que existe un conjunto no vacío X tal que $X \in X$. Por el Axioma del Par, $\{X\}$ también es un conjunto, y puesto que X es el único miembro de $\{X\}$, el conjunto $\{X\}$ contradice el Axioma de Fundación, ya que X y $\{X\}$ tienen a X como elemento común, es decir, todo elemento de $\{X\}$ tiene un elemento común con $\{X\}$.

(b) Para este caso considere el par no ordenado $\{A, B\}$ y proceda de modo análogo a *(a)*. ■

La parte *(a)* del teorema anterior responde a la pregunta planteada anteriormente: ¿para algún conjunto X puede ocurrir que $X \in X$? Mientras que de la parte *(b)* podemos deducir que no pueden existir ciclos de la forma $A \in B \in A$.

Hasta ahora nuestra lista de axiomas no está completa. Pospondremos los restantes para capítulos ulteriores cuando introduzcamos otros conceptos y hayamos establecido algunos teoremas que nos permitirán entenderlos.

Ahora introduciremos una notación convencional. Sea $\mathbf{P}(x)$ una propiedad de x (y, posiblemente de otros parámetros). Si hay un conjunto A tal que para todo x, $\mathbf{P}(x)$ implica $x \in A$, entonces $\{x \in A : \mathbf{P}(x)\}$ existe; y más aún, no depende de quién sea el conjunto A. En efecto, si A' es otro conjunto tal que, para todo x, $\mathbf{P}(x)$ implica $x \in A'$, entonces

$$\left\{x \in A' : \mathbf{P}(x)\right\} = \{x \in A : \mathbf{P}(x)\}\,.$$

Podemos ahora definir $\{x : \mathbf{P}(x)\}$ como el conjunto $\{x \in A : \mathbf{P}(x)\}$, donde A es cualquier conjunto para el que $\mathbf{P}(x)$ implica $x \in A$. $\{x : \mathbf{P}(x)\}$ es el conjunto de todo x que tiene la propiedad $\mathbf{P}(x)$. Enfatizamos nuevamente que esta notación podrá ser usada solamente después que se haya probado que algún conjunto A contiene a todos los x con la propiedad $\mathbf{P}(x)$. Recuerde que lo que llamamos clase tiene otra notación, a saber, $\langle x : \mathbf{P}(x)\rangle$.

Ejemplo 2.34 $\{x : (x \in P) \wedge (x \in Q)\}$ existe.

Demostración:

Sea $\mathbf{P}(x, P, Q)$ la propiedad “$x \in P$ y $x \in Q$”. Sea $A = P$; entonces $\mathbf{P}(x, P, Q)$ implica $x \in A$. Por lo tanto,

$$\{x : (x \in P) \wedge (x \in Q)\} = \{x \in P : (x \in P) \wedge (x \in Q)\} = \{x \in P : x \in Q\}$$

es el conjunto del Ejemplo 2.3. ■

Ejemplo 2.35 $\{x : (x = a) \vee (x = b)\}$ existe. Para una prueba, tómese $A = \{a, b\}$ y demuéstrese que $A = \{x : (x = a) \vee (x = b)\}$.

Ejemplo 2.36 $\{x : x \notin x\}$ no existe (recuérdese la *Paradoja de Russell* Ejemplo 2.4); así en este caso, la notación $\{x : \mathbf{P}(x)\}$ es inadmisible.

Como ya se dijo, la primera axiomatización de la Teoría de Conjuntos fue dada por Zermelo [Z_2]. La formulación del Axioma Esquema de Comprensión, al cual le llamaba *Aussonderungsaxiom*, fue más bien ambiguo y dio lugar a serias discusiones; la versión adoptada fue formulada por T. Skolem [S_7] en 1922. El Axioma de Fundación fue propuesto por D. Mirimanoff en 1917.

Russell y Whitehead en su famoso *Principia Mathematica* (primera edición 1910-1913) dieron también una de las primeras y más influyentes axiomatizaciones para la Teoría de Conjuntos. Ellos evitaban las paradojas introduciendo la llamada "teoría de tipos"; en la cual se definen una cantidad infinita de diferentes tipos de variables de conjuntos. Para cada tipo de variables de conjuntos hay una cantidad infinita de variables del siguiente tipo superior. La propiedad "x es un miembro de y" tiene significado si y sólo si y es de exactamente un tipo superior a x. La paradoja de Russell, por ejemplo, al estar representada por la propiedad "x no es un miembro de x" carece de sentido en la teoría de tipos. Ya que la teoría de tipos es complicada, y puesto que es pesado dar seguimiento a todos los tipos de variables, esta teoría es inconveniente para el desarrollo de las matemáticas.

Otra axiomatización de la Teoría de Conjuntos fue propuesta por Quine en 1931. Su enfoque puede decirse que es mas bien semántico; él dio reglas para la construcción de propiedades. La teoría de Quine es más manejable que la teoría de los tipos pero contiene fallas fatales que no permite desarrollar la matemática a partir de esta teoría. Specker [S_8] en 1953 demostró que el Axioma de Elección (que después formularemos) es inconsistente en el sistema de Quine.

Von Neumann [N_2], [N_3] entre 1925 y 1928 propuso otra axiomatización en la cual se hacía preciso el ambiguo Axioma Esquema de Comprensión de Zermelo. En lugar de usar propiedades como Skolem, Von Neumann admitió una nueva noción primitiva dentro de la Teoría de Conjuntos: la de *clase*. Este sistema fue posteriormente reformulado por Bernays [B_1] en 1937 y por Gödel [G_2] en 1938. La ventaja del sistema resultante, llamado en la literatura "sistema **BG**", es que está basado en un número finito de axiomas. Otros sistemas axiomáticos fueron propuestos por Morse y por Kelley [M_5], [K_3].

Ejercicios 2.2

1. Muestre que los conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\ldots$, $\{\cdots\{\emptyset\}\cdots\}$ son distintos.
2. Indique cuáles de las siguientes expresiones son falsas:

$$\text{(a) } A = \{A\}\,, \qquad \text{(b) } \{a,b\} = \{\{a\}\,,\{b\}\}\,, \qquad \text{(c) } \emptyset \in \{\emptyset\}\,.$$

3. Muestre que el conjunto de todos los x tales que $x \in A$ y $x \notin B$ existe. ¿Es único?
4. Pruebe que para cualquier conjunto X hay algún $a \notin X$.
5. Demuestre la unicidad del conjunto U asegurado por el Axioma de Unión.
6. Pruebe que $\bigcup \emptyset = \emptyset$.
7. Verifique la afirmación hecha en el Ejemplo 2.15.
8. Sean A y B conjuntos. Muestre que existe un único conjunto C tal que $x \in C$ si y sólo si ($x \in A$ y $x \notin B$) o ($x \in B$ y $x \notin A$).
9. Demuestre que $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$.
10. (a) Muestre que para cualesquiera conjuntos A, B y C existe un único conjunto P tal que $x \in P$ si y sólo si $x = A$ o $x = B$ o $x = C$.
    (b) Generalice (a) para cuatro o más elementos.
11. Demuestre que $A \subseteq \{A\}$ si y sólo si $A = \emptyset$.
12. Verifique las afirmaciones de los Ejemplos 2.18, 2.19, 2.20.
13. Pruebe la afirmación del Ejemplo 2.22.
14. Demuestre que si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
15. Pruebe la afirmación del Ejemplo 2.35.
16. Complete la demostración del Teorema 2.33(b).
17. Pruebe que es imposible la existencia de un ciclo:

$$A_0 \in A_1 \in A_2 \in \cdots \in A_n \in A_0$$

para toda $n \in \mathbf{N}$.

18. (a) Demuestre que para cualquier conjunto X es falso que $\mathcal{P}(X) \subseteq X$. En particular $X \neq \mathcal{P}(X)$.

    (b) Demuestre que el conjunto de todos los conjuntos no existe usando el inciso (a).

19. Reemplace el Axioma de Existencia por el siguiente axioma:
    Axioma Débil de Existencia. Existe al menos un conjunto.
    Deduzca el Axioma de Existencia usando el Axioma Débil de Existencia y el Axioma Esquema de Comprensión.

20. El Axioma de Unión, el Axioma del Par y el Axioma del Conjunto Potencia pueden reemplazarse por las siguientes versiones más débiles:
    Axioma Débil del Par. Para cualesquiera a, b existe un conjunto C tal que $a \in C$ y $b \in C$.
    Axioma Débil de Unión. Para cualquier conjunto S existe un conjunto U tal que si $x \in A$ y $A \in S$ entonces $x \in U$.
    Axioma Débil del Conjunto Potencia. Para cualquier conjunto S existe un conjunto P tal que $X \subseteq S$ implica $X \in P$.
    Deduzca el Axioma del Par, el Axioma de Unión y el Axioma del Conjunto Potencia, usando las versiones débiles. (Sugerencia: use el Axioma Esquema de Comprensión).