EJERCICIOS I
TEORÍA DE CONJUNTOS.

Aquí les sugiero algunos ejercicios. Los primeros son tomados de la página 10 del texto, los reescribo para su entera comodidad. Todos los ejercicios debería empezar con "Demuestre que si..."; sin embargo nos evitaremos eso y escribiremos cada ejercicio como una afirmación que debe ser verificada o demostrada con lujo de detalles.

Recordemos algunas definiciones. Si f es una función y A es un conjunto, entonces *la restricción de f a A* es definida por

$$f \restriction A = \{\langle x, y\rangle \in f : x \in A\}.$$

También si f y g son funciones, entonces la *función composición* $g \circ f$ está definida por

$$g \circ f = \{\langle x, z\rangle : (\exists y)\left(\langle x, y\rangle \in f \ \& \ \langle y, z\rangle \in g\right)\}.$$

(1) Si A es un conjunto y $x, y \in A$, entonces $\{x\}, \{x, y\} \in \mathcal{P}(A)$ y $\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.
(2) Si A es un conjunto, entonces el conjunto B de todos los pares ordenados formados por elementos de A existe.
(3) Si A es un conjunto y $\{x, y\} \in A$, entonces $x, y \in \bigcup A$.
(4) Si A es un conjunto y $\langle x, y\rangle \in A$, entonces $x, y \in \bigcup\bigcup A$.
(5) Si f es una función, entonces $\operatorname{dom}(f), \operatorname{ran}(f) \subseteq \bigcup\bigcup f$.
(6) Si f es una función inyectiva, entonces

$$f^{-1} \subseteq \mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\bigcup\{\operatorname{dom}(f), \operatorname{ran}(f)\}\right)\right).$$

(7) Supongamos que $f : X \to Y$ es una función. Entonces:
   (a) Para cada $A \subseteq X$ resulta que $A = \emptyset$ si y sólo si $f[A] = \emptyset$.
   (b) $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.
   (c) $f[\{x\}] = \{f(x)\}$.
   (d) Si $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $f[A] \subseteq f[B]$ y $f[B \setminus A] \supseteq f[B] \setminus f[A]$.
   (e) Si $A' \subseteq B' \subseteq Y$, entonces $f^{-1}[A'] \subseteq f^{-1}[B']$ y $f^{-1}[B' \setminus A'] = f^{-1}[B'] \setminus f^{-1}[A']$.
   (f) Si A y B son subconjuntos de X, entonces $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$ y $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$. Además, la igualdad en la última relación no necesariamente se obtiene.
(8) Sean f y g funciones. Entonces $g \circ f$ es una función. Además $g \circ f$ está definida en x si y sólo si f está definida en x y g está definida en $f(x)$; es decir, $\operatorname{dom}(g \circ f) = \operatorname{dom}(f) \cap f^{-1}[\operatorname{dom}(g)]$.
(9) Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos funciones.

Date: Septiembre 5, 2005.

(a) Si $g \circ f$ es inyectiva, qué se puede decir de la inyectividad de f y de g.
(b) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, qué se puede decir de la sobreyectividad de f y de g.

(10) Dar un ejemplo de una función f y de un conjunto A tal que

$$f \cap (A \times A) \neq f \upharpoonright A.$$

(11) Si A y B son conjuntos, entonces B^A existe.