EJERCICIOS III
TEORÍA DE CONJUNTOS.

Recordemos que si $f : A \to B$ es una función, entonces $f \subseteq A \times B$ y $f^{-1} = \{\langle y, x\rangle : \langle x, y\rangle \in f\}$ es en general solamente un subconjunto de $B \times A$. En clase vimos que en caso de que f sea una función inyectiva entonces f^{-1} es una función aunque su dominio puede no ser igual a B. También recordemos que la función identidad en A es la función $Id_A = \{\langle x, x\rangle : x \in A\}$.

Definición 1. Sea $f : A \to B$ una función.

(1) Una función $g : B \to A$ se llama *inversa izquierda de* f si se tiene que $g \circ f = Id_A$.
(2) Una función $h : B \to A$ se llama *inversa derecha de* f si se tiene que $f \circ h = Id_B$.

Demuestre lo siguiente:

(1) Si $f : A \to B$ es una función inyectiva, entonces f tiene una inversa izquierda; es decir, existe una función $g : B \to A$ que es inversa izquierda de f.
(2) Los siguientes enunciados son equivalentes:
    (a) El Axioma de Elección.
    (b) Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos, entonces existe un conjunto B tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, $A \cap B$ es un conjunto con un único elemento.
    (c) Toda función sobreyectiva tiene una inversa derecha.
    (d) Si $\Gamma \neq \emptyset$ y $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es una familia de conjuntos tales que $A_\gamma \neq \emptyset$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y si $\alpha, \beta \in \Gamma$ son distintos elementos entonces $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, entonces existe $B \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ tal que $|B \cap A_\gamma| = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$.
    (e) Si $\Gamma \neq \emptyset$ y $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es una familia indizada de conjuntos no vacíos, entonces $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \neq \emptyset$.
    (f) Si $F : X \to \wp(Y) \setminus \{\emptyset\}$ es una función, entonces existe una función $f : X \to Y$ tal que $f(x) \in F(x)$ para todo $x \in X$.
(3) Si $\Gamma \neq \emptyset$ y $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es una familia indizada de conjuntos no vacíos, entonces $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subseteq \wp\left(\wp\left(\wp\left(\Gamma \cup \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)\right)\right)$.
(4) El Axioma de Elección implica que $|\bigcup\mathcal{A}| \leq \sum_{A\in\mathcal{A}} |A|$.
(5) Si para cada $\gamma \in \Gamma$ se tiene que $f_\gamma : A_\gamma \to B$ es una función, entonces $f = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$ es una función si y sólo si para cualesquiera $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ se tiene que $f_\gamma \restriction A_\gamma \cap A_{\gamma'} = f_{\gamma'} \restriction A_\gamma \cap A_{\gamma'}$. ¿Cuál es el dominio de f en caso de ser función?

Date: Septiembre 21, 2005.