1. Demostrar que el Axioma de Elección (A.C) es equivalente al siguiente enunciado:
Si (X, R) es un conjunto parcialmente ordenado, entonces existe un subconjunto $M \subseteq X$ $\subseteq$-maximal el cual es linealmente ordenado por R.

Demostración: Hipotesis: (A.C), en la versión Lema de Zorn. Sea $\mathcal{C}$ una cadena que consiste de subconjuntos de X linealmente ordenados. Claramente $\bigcup \mathcal{C} \subseteq X$ es una cota superior para $\mathcal{C}$. Por lo tanto, aplicando el lema de Zorn, tenemos que existe un subconjunto $\subseteq$-maximal $M \subseteq X$ con las propiedades deseadas.

Para la otra implicación vamos a demostrar el lema de Zorn, es decir si (X, R) es un conjunto parcialmente ordenado en el cual toda cadena tiene una cota superior, entonces X posee un elemento maximal. Para ello consideremos la familia Y de todos los subconjuntos de X que son bién ordenados y

$$S = \{(u, v) \in Y^2 : u \text{ es un segmento } R\text{-inicial de } v\}.$$

Observemos que S es un orden parcial sobre Y. Por hipotesis Y posee un conjunto $\subseteq$-maximal M el cual es linealmente ordenado por S. Entonces $\bigcup M$ es una cadena en X y por consiguiente tiene una cota superior, digamos c. Afirmamos que c es un elemento maximal en (X, R). Pues supongamos que c no es maximal, entonces existe un $z \in X$, tal que, $c < z$, pero entonces, z es una cota superior para $\bigcup M$, y por lo tanto, $M \cup (\bigcup M \cup \{z\})$ es ordenado lienalmente por S, lo cual contradice la maximalidad de M. ■

2. Si α es el minimo ordinal α tal que $\alpha = \omega_\alpha$, entonces ω_α no es un cardinal debilmente inaccesible.

Demostración: Recordemos que un cardinal es debilmente inaccesible si este es limite y regular a la vez. Por lo tanto, supongamos que α es regular, es decir, supongamos que $cf(\alpha) = \alpha$. Consideremos una sucesión de ordinales menores que α de la siguiente manera:
$\beta_0 < \omega_{\beta_1} < \beta_2 < \omega_{\beta_3} < \cdots$,
entonces $lim_{n \to \omega} \beta_{2n} = sup(\beta_{2n}) = sup(\omega_{\beta 2n-1}) = \omega_{\beta_\omega} = \beta_\omega$. Como esta suseción es de longitud ω, y α es regular, se tiene que $\omega_{\beta_\omega} = \beta_\omega < \alpha$. ■