Alejandro Torres Ayala.

II.2. Demostrar que si S es un conjunto estacionario en ω_1 y α un ordinal numerable, entonces S contiene un subconjunto cerrado C con tipo de orden α.

Demostración: Nuestra prueba es por inducción. Obsérvese que es fácil encontrar subconjuntos cerrados C_β en S con $otp(C_\beta) = \beta$ para todo β finito. Por lo tanto, consideremos la siguiente hipotesis inductiva: Para todo $\gamma \in \omega_1$y para todo $\beta < \alpha < \omega_1$, existe un subconjunto cerrado $C_\beta \subseteq S$ con tipo de orden β y tal que, $\gamma < min(C_\beta)$. Supongamos que α es límite y encontremos un subconjunto cerrado C de S con tipo de orden α usando la hipótesis inductiva. Como α es límite, tenemos que $\alpha = sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Sean $C_i \subseteq S$ cerrados tal que $otp(C_i) = \alpha_i + 1$, para cada $i \in \omega$. Esto implica que para toda $i \in \omega$ existen isomorfismos $f_i : C_i \to \alpha_i + 1$. Por lo tanto, consideremos $D_0 = C_0$ y $D_{i+1} = C_{i+1} - \{\xi \in C_{i+1} : f_{i+1}(\xi) \in (\alpha_i) + 1\}$ para cada $i \in \omega$. Entonces, hacemos $C = \bigcup_{i \in \omega} D_i$. Entonces tenemos que $otp(C) = \alpha$, y además C es cerrado pues en la constrcucción se le agregaron todos sus puntos límite.

El siguiente paso es encontrar un subconjunto cerrado de S con tipo de orden $\alpha + 1$, para α límite. Ahora en nuestra hipótesis podemos usar además que existen subconjuntos cerrados de S con tipo de orden α. Consideremos el siguiente subconjunto $A = \{\beta_\gamma : \gamma \in \omega_1\}$, donde β_γ se define como sigue: Para $\gamma \in \omega_1$, sea $B_\gamma \subseteq S$ cerrado con $otp(B_\gamma) = \alpha$, en estas condiciones definimos $\beta_\gamma = sup(\bigcup_{\xi < \gamma} B_\xi) < min(B_\gamma)$. Observemos que por construcción A es un cerrado y por la hipóteis es no acotado en ω_1, por lo tanto, $A \cap S \neq \emptyset$. Sea $\beta \in A \cap S$ el cual lo podemos suponer límite (pues el conjunto de los puntos límite de A es también un c.u.b.), esto implica que $\beta = sup\{\beta_n : n \in \omega\}$. Entonces ahora procedemos igual que en el caso anterior solo que ahora podemos agregar β, pues este punto pertenece a S, es decir, hacemos $C = \bigcup_{i \in \omega} D_i \cup \{\beta\}$, donde los D_i se definen de igual manera que en el caso anterior.

Para ordinales $\alpha + k$ con $k > 1$ es fácil proceder usando la hipótesis inductiva.