Alejandro Torres Ayala.

IV.1. Si $f, g \in \omega^\omega$, defina $f \leq^* g$ si y sólo si existe $n \in \omega$ tal que para $m > n$ se tiene que $f(m) \leq g(m)$. Sea $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ con $\mid \mathcal{F} \mid\leq \kappa$ Suponiendo $MA(\kappa)$, demuestre que existe $g \in \omega^\omega$ tal que $f \leq^* g$, para todo $f \in \mathcal{F}$.

Solución: Consederemos el siguiente conjunto $\mathbb{P}$ de pares ordenados $\langle p, F\rangle$ tales que $p; \omega \to \omega$ es una función parcial finita y F es un subconjunto finito de $\mathcal{F}$. Definimos $\langle p, F\rangle \leq \langle q, F'\rangle$ si

i) $q \subseteq p$;

ii) $F' \subseteq F$, y

iii) $(\forall f \in F')(\forall n \in dom(p) \setminus dom(q))(p(n) > f(n))$.

Veamos que podemos aplicar Axioma de Martin: Sea $A \subseteq \mathbb{P}$ no numerable. Como el conjunto de funciones parciales finitas de ω es numerable, se tiene que alguna $p; \omega \to \omega$ aparece una cantidad no numerable de veces en A, por lo tanto, sean $a, b \in A$, los cuales podemos suponer que se escriben como $a = \langle p, F\rangle$ y $b = \langle p, F'\rangle$. Sea $c = \langle p, F \cup F'\rangle$. Claramente tenemos que $c \leq a$ y $c \leq b$. Por lo tanto, $\mathbb{P}$ es c.c.c.

Sea $D_f = \{\langle p, F\rangle \in \mathbb{P} : f \in F\}$, entonces D_f asi definido es denso en $\mathbb{P}$. En efecto sea $\langle q, F'\rangle \in \mathbb{P}$ y hagamos $G = F' \cup \{f\}$, entonces se tiene que $\langle q, G\rangle \leq \langle q, F'\rangle$. Tambien definamos para cada $n \in \omega$ $D_n = \{\langle p, F\rangle \in \mathbb{P} : n \in dom(p)\}$. Afirmamos que D_n es denso en $\mathbb{P}$. Pues sea $\langle q, F'\rangle \in \mathbb{P}$. Si $n \in dom(q)$ ya terminamos. Por tanto, supongamos que $n \notin dom(q)$ y hagamos $p = q \cup \{\langle n, 1 + max\{f(n) : f \in F'\}\rangle\}$. Ahora sean $\mathcal{D} = \{D_f : f \in \mathcal{F}\} \bigcup \{D_n : n \in \omega\}$ y G un filtro $\mathcal{D}-$gererico. Entonces afirmamos que si $\bigcup G = g$, entonces $g : \omega \to \omega$ es tal que $f \leq^* g$, para todo $f \in \mathcal{F}$.
Para probar esto consideremos a $f \in \mathcal{F}$. Como $G \cap D_f \neq \emptyset$. Sean $a = \langle p, F\rangle \in H \cap D_f$ y $n \in \omega$, con $n > max\{k : k \in dom(p)\}$. Luego sea $b = \langle q, F'\rangle \in H \cap D_n$. Como G es filtro, existe $c \in G$ con $c = \langle r, H\rangle$ tal que $c \leq a$ y $c \leq b$. Luego tenemos que $g|_{dom(r)} = r$. Por lo tanto, $f(n) < r(n) = g(n)$. Por construcción de g tenemos que para $m > n$ $f(m) \leq g(m)$.