Teoría de Conjuntos
Tarea No. 1.

Iván Martínez Ruíz
David Meza Alcántara

5 de marzo de 2005

Ejercicio 1 *(a) Demuestre, sin usar AC, que cualquier espacio métrico con un subespacio denso bien ordenado es paracompacto. En particular, espacios métricos separables, como $\mathbb{R}$, son paracompactos.*

(b) Feferman y Lévy demostraron que es consistente con ZF que $\aleph_1$ es un cardinal singular. Demuestre asumiendo eso que es consistente que ω_1 es paracompacto.

Solución. Para el inciso (a), sea X espacio métrico y D un subconjunto denso bien ordenado de X. Dada una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, es posible encontrar un refinamiento de $\mathcal{U}$ por bolas de radio $\frac{1}{n}$ centradas en elementos de D. Esto muestra que es suficiente considerar cubiertas por bolas centradas en elementos de D. Sea $\leq$ el orden antilexicográfico de $D \times \omega$. Éste es un buen orden dado que es el producto de dos buenos ordenes. La biyección $(d, n) \to B_{\frac{1}{n}}(d)$ induce un buen orden para la familia de bolas de radio $\frac{1}{n}$ centradas en un elemento de D. De éste modo, podemos reproducir el argumento de A. S. Stone, que a la letra dice: Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Por el argumento anterior, podemos suponer que $\mathcal{U}$ consta de bolas de radio $\frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ centradas en elementos de D. Sea $\prec$ el buen orden de ésta familia inducido por la biyección con $D \times \omega$. Para cada $n = 1, 2, \ldots$ y $U \in \mathcal{U}$, sea $U_n = \{x \in U : \rho(x, X \setminus U) \geq \frac{1}{2^n}\}$. Entonces

$$\rho(U_n, X \setminus U_{n+1}) \geq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n + 1} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Para toda $n = 1, 2, \ldots$ y $U \in \mathcal{U}$, sea

$$U_n^* = U_n \setminus \cup\{V_n + 1 : V \in \mathcal{U} \wedge V \prec U\}$$

Para cualesquiera $U, V \in \mathcal{U}$ y cada $n = 1, 2, \ldots$ sucede

$$U_n^* \subset X \setminus V_{n+1} \;\; si \; U \prec V$$

y

$$V_n^* \subset X \setminus U_{n+1} \;\; si \; V \prec U$$

En ambos casos,

$$\rho(U_n^*, V_n^*) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Para cada $U \in \mathcal{U}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define U_n^+ como sigue:

$$U_n^+ = \{x \in X : \rho(x, U_n^*) < \frac{1}{2^{n+3}}\}$$

De este modo, $\rho(U_n^+, V_n^+) \geq \frac{1}{2^n+2}$, y así $\mathcal{V}_n = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es discreta para toda n, de donde $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ es σ-discreta, y así, localmente finita. Además, $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$ y cubre a X. Esto concluye la solución de (a).

Para el inciso (b), supongamos que ω_1 es singular. Sea $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ una sucesión de ordinales numerables cuyo supremo es ω_1. Ésto se puede hacer por la singularidad de ω_1

$$\omega_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \alpha_n$$

Incluso, podemos suponer que la sucesión $\{\alpha_n\}$ es estrictamente creciente.

Sea $A_0 = \alpha_0 + 1$, $A_{n+1} = \alpha_{n+1} + 1 \setminus A_n$. Observemos que cada A_n $(n \geq 1)$ es un intervalo de la forma $(\alpha_n, \alpha_{n+1}]$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de ω_1. Por cada A_n, veamos que hay una familia finita de intervalos de la forma $(\alpha, \beta]$ que refina a $\mathcal{U}$ y que cubre a A_n. En efecto, A_n mismo es un intervalo de esa forma, digamos $A_n = (\alpha_n, \alpha_{n+1}]$. Como $\mathcal{U}$ es cubierta de ω_1, hay un elemento de $\mathcal{U}$, digamos U_0, tal que $\alpha_{n+1} \in U_0$. Sea $\epsilon_0 = min\{\epsilon < \alpha_{n+1} : (\epsilon, \alpha_{n+1}] \subseteq U_0$. Si $\epsilon_0 \notin (\alpha_n, \alpha_{n+1})$ entonces $\{(\epsilon_0, \alpha_n]\}$ es un conjunto finito de intevalos de la forma $(\alpha, \beta]$ que refina a $\mathcal{U}$ y que cubre a $(\alpha_n, \alpha_{n+1}]$. Si $\epsilon_0 \in (\alpha_n, \alpha_{n+1}]$, entonces hay $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que $\epsilon_0 \in U_1$. Se define $\epsilon_1 = min\{\epsilon < \epsilon_0 : (\epsilon, \epsilon_0] \subseteq U_1\}$. Siguiendo este procedimeinto mientras $\epsilon_k > \alpha_n$, lograremos cubrir a A_n con un número finito de pasos (por el principio del no descenso infinito) y en efecto, cada A_n se puede cubrir por un número finito de intervalos cerrados y abiertos que refinana a $\mathcal{U}$ y que claramente es localmente finita. Sea R_n la cubierta de A_n que refina a $\mathcal{U}$. La unión $\cup_{n=0}^{\infty} R_n$ es un refinamiento σ-localmente finito de $\mathcal{U}$, lo cual prueba que toda cubierta abierta de ω_1 tiene una subcubierta abierta σ-localmente finita, lo cual equivale a que ω_1 es paracompacto.

■