Teoría de Conjuntos
Tarea No. 2.

David Meza Alcántara

26 de marzo de 2005

Para resolver el ejercicio se necesita un par de sencillos lemas.

Lema 1 *Sean α, β ordinales y $f : \alpha \to \beta$ una función monótona cofinal, es decir, tal que para todo $\gamma < \beta$ existe $\delta < \alpha$ tal que $f(\delta) \geq \gamma$. Entonces existe una función normal (monótona y continua) $g : \alpha \to \beta$ tal que para todo ordinal sucesor $\gamma < \alpha$, $g(\gamma) = f(\gamma)$.*

Prueba. Dada f monótona y cofinal de α en β, se define g por casos como sigue: Para todo ordinal $\gamma < \alpha$ $g(\gamma+1) = f(\gamma+1)$ y si γ es límite entonces $g(\gamma) = \sup\{g(\delta) : \delta < \gamma\}$. Esta función es continua por construcción. ■

Lema 2 (Primer Teorema de Isomorfismo) *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ álgebras booleanas y $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un epimorfismo de álgebras booleanas. La coraza (shell) de f es el conjunto $Cor(f) = \{a \in \mathfrak{A} : f(a) = 1\}$ es un filtro (dual del núcleo de f) y satisface que el cociente $\mathfrak{A}/Cor(f)$ es isomorfo a $\mathfrak{B}$.*

Prueba. Es trivial ver que $Cor(f)$ es filtro. La función $\bar{f} : \mathfrak{A}/_{Cor(f)} \to \mathfrak{B}$ dada por

$$\bar{f}([a]) = f(a)$$

La equivalencia

$$\begin{array}{rll}
[a] = [b] & \iff a \sim_{Cor(f)} b & \text{Por definición} \\
& \iff (a \vee b^c) \wedge (b \vee a^c) \in Cor(f) & \text{intersectando a } a \text{ y a } b \text{ con éste} \\
& & \text{elemento de } Cor(f) \text{ se obtiene } a \wedge b \\
& \iff 1 = f((a \vee b^c) \wedge (b \vee a^c)) = & (f(a) \vee f(b)^c) \wedge (f(b) \vee f(a)^c) \\
& \iff f(a) = f(b) &
\end{array}$$

prueba dos cosas: $\bar{f}$ es función ($\Rightarrow$) y es inyectiva ($\Leftarrow$). Veamos que $\bar{f}$ es isomorfismo de álgebras booleanas. Dado que f es epimorfismo, $\bar{f}$ es epimorfismo y como $\bar{f}$ es inyectiva, concluímos que es isomorfismo. ■

Ejercicio 3 *Sean κ y λ cardinales tales que $cf(\lambda) = \kappa$, y que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ son los respectivos filtros generados por los conjuntos cerrados y no acotados en κ y λ, respectivamente. Demuestra que las álgebras cociente $P(\kappa)/\mathcal{F}^*$ y $P(\lambda)/\mathcal{H}^*$ son isomorfas.*

Solución. Sea $f : \kappa \to \lambda$ una función cofinal normal. f induce un homomorfismo $\bar{f}$ de álgebras booleanas entre $P(\kappa)$ y $P(\lambda)$, que para todo $X \subset \kappa$ está dado por

$$\bar{f}(X) = f[X]$$

Sea $\mathcal{K} = \{\bar{f}(B) \subseteq \lambda : B \in \mathcal{F}\}$.

Mostraremos que la normalidad de f implica que $\bar{f}$ lleva cubs en cubs. Si $A \subset \kappa$ es un cub, como la imagen de f no es acotada en κ y f es creciente, $\bar{f}(A)$ no es acotado en κ. Si α es el supremo de un subconjunto de $\bar{f}(A)$, tomamos $B = \{\beta \in A : f(\beta) \leq \alpha\}$. Como A es cerrado, el supremo de B está en A, y como f es continua, $f(\sup(B)) = \sup\{f(\beta) : \beta \in B\} = \sup\{f(\beta) : f(\beta) \leq \alpha\} = \alpha$.

Veamos que $\mathcal{K}$ es una base de filtro para $\mathcal{H}$.

En primer lugar, observe que si $B \in \mathcal{F}$, entonces hay $A \subseteq B$ cerrado y no acotado. Como f es normal, $\bar{f}(A)$ es un subconjunto de κ cerrado y no acotado, por lo que $\bar{f}(A) \in \mathcal{H}$. Como $\bar{f}(A) \subseteq \bar{f}(B)$ se tiene que $\bar{f}(B) \in \mathcal{H}$.

En segundo lugar, observe que si $C \subset \lambda$ es cerrado y no acotado, entonces $D = C \cap f[\kappa]$ es cerrado y no acotado, de donde $f^{-1}[C] = f^{-1}[D]$ es cerrado y no acotado en κ. En consecuencia, $\bar{f}(f^{-1}[C] \subseteq C)$, por lo que hay un elemento de $\mathcal{K}$ contenido en C.

Definiremos la función $g : P(\kappa) \to P(\lambda)/\mathcal{H}$ como sigue:

$$g(X) = [\bar{f}(X)]_{\mathcal{H}}$$

esto es, $g(X)$ es la clase de equivalencia de $\bar{f}(X)$ módulo $\mathcal{H}$.

g es claramente un homomorfismo de álgebras booleanas. Veamos que g es suprayectiva. Sea $Y \subset \lambda$. $Y \sim_{\mathcal{H}} (Y \cap \bar{f}(\kappa))$, pues $\bar{f}(\kappa) \in \mathcal{H}$. Además, $Y \cap \bar{f}(\kappa) = \bar{f}(f^{-1}[Y])$, es decir, $Y \cap \bar{f}(\kappa)$ está en la imagen de $\bar{(}f)$, por lo que $[Y]_{\mathcal{H}} = [Y \cap \bar{f}(\kappa)]_{\mathcal{H}}$ está en la imagen de g.

Finalmente, veamos que la coraza de g es $\mathcal{F}$. En efecto, $g(X) = 1$ si y sólo si $\bar{f}(X) \in \mathcal{H}$. Pero $\mathcal{K}$ es una base de filtro para $\mathcal{H}$, así que hay un $F \in \mathcal{F}$ tal que $\bar{f}(F) \subset \bar{f}(X)$, lo cual equivale, dado que f es inyectiva, a que hay $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq X$, es decir, $X \in \mathcal{F}$. Dicho de otro modo:

$$\begin{aligned} g(X) = 1 &\iff \bar{f}(X) \in \mathcal{H} \\ &\iff f[X] \in \mathcal{H} \\ &\iff X \text{ contiene un cerrado y acotado en } \kappa \\ &\iff X \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

De este modo, por el Primer Teorema de Isomorfismo, $P(\kappa)/\mathcal{F}^* \cong P(\lambda)/\mathcal{H}^*$
■