Ejercicios I

February 24, 2005

1. (Érica y Salomón) Demuestre que el Axioma de Elección (AC) es equivalente a: Cualquier función perfecta de un espacio topológico en otro tiene una restricción irreducible a un subespacio cerrado de su dominio.

2. (Alejandro y Alexei) Demuestre que el AC es equivalente a: Si R es un orden parcial sobre X, entonces existe un subconjunto $\subseteq$-maximal de X el cual es linearmente ordenado por R. (Sugerencia: Para una de las implicaciones será útil considerar la familia Y de todos los subconjuntos bien ordenados de X y
$$S = \left\{ \langle u, v \rangle \in Y^2 : u \text{ es un segmento } R\text{-inicial de } v \right\}.)$$

3. (Pável y Alejandro) Si α es el mínimo ordinal α tal que $\alpha = \omega_\alpha$, entonces $\aleph_\alpha$ no es un cardinal débilmente inaccesible.

4. (a) (Iván, David y Salomón) Demuestre, sin usar AC, que cualquier espacio métrico con un subespacio denso bien ordenado es paracompacto. En particular, espacios métricos separables, como $\mathbb{R}$, son paracompactos (sin usar AC). (Indicación: Parte de la demostración usual del Teorema de Stone sigue siendo útil.)
   (b) Feferman y Lévy demostraron que es consistente con ZF que $\aleph_1$ es un cardinal singular. Demuestre asumiendo eso que es consistente que ω_1 es paracompacto. (Indicación: Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta y $\alpha < \beta < \omega_1$ entonces existe una familia finita de subconjuntos abiertos y cerrados de $(\alpha, \beta]$ que refinan $\mathcal{U}$ y cubren ese intervalo.)

5. (Pável e Iván) Sea κ un cardinal infinito y sea $\trianglelefteq$ cualqueir buen orden de κ. Demuestre que hay un $X \subseteq \kappa$ tal que $|X| = \kappa$ y $\trianglelefteq$ y $\leq$ coinciden sobre X.

6. (Alexei y Érica) Demuestre que si $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$, entonces existen $X_n \subseteq \alpha$, con $n \in \omega$, tales que $\alpha = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ y $\operatorname{otp}(X_n) \leq \kappa^n$.