EJERCICIOS IV

He aquí los primeros ejercicios sobre aplicaciones del Axioma de Martin. La mayoría de estos son tomados del libro de K. Kunen.

(1) (Alejandro) Si $f, g \in \omega^\omega$, defina $f \leq^* g$ si y sólo si existe $n \in \omega$ tal que para $m > n$ se tiene que $f(n) \leq g(n)$. Sea $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ con $|\mathcal{F}| \leq \kappa$. Suponiendo $\mathsf{MA}(\kappa)$, demuestre que existe $g \in \omega^\omega$ tal que $f \leq^* g$, para todo $f \in \mathcal{F}$. Sugerencia: Considere $\mathbb{P}$ como el conjunto de pares $\langle p, F\rangle$ tales que $p\,;\,\omega \to \omega$ es una función parcial finita[1] y F es un subconjunto finito de $\mathcal{F}$. Ponga $\langle p, F\rangle \leq \langle q, F'\rangle$ si $p \supseteq q$, $F \supseteq F'$ y

$$\left(\forall f \in F'\right)\left(\forall n \operatorname{dom}(p) \setminus \operatorname{dom}(q)\right)\left(p(n) > f(n)\right).$$

(2) (Osvaldo) Un orden parcial $\mathbb{P}$ tiene a $\aleph_1$ como *precalibre* si siempre que $p_\alpha \in \mathbb{P}$, con $\alpha < \omega_1$, hay un subconjunto no numerable X de ω_1 tal que $\{p_\alpha : \alpha \in X\}$ tiene la *pif*; es decir, que para cualquiera de sus subconjuntos finitos $F \subseteq X$ exite $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leq p_\alpha$ para todo $\alpha \in F$. Demuestre que cualqueir $\mathbb{P}$ que es c.c.c. tiene a $\aleph_1$ como precalibre si se asume $\mathsf{MA}(\aleph_1)$.

(3) (Érica) Suponga $\mathsf{MA}(\kappa)$ y sea $\langle X, \leq\rangle$ un orden todal con $|X| \leq \kappa$. Demuestre que hay $a_x \subseteq \omega$, para $x \in X$ tales que $x < y \Rightarrow a_x \subset^* a_y$. Sugerencia: $\mathbb{P}$ es el conjunto de pares $\langle p, n\rangle$ tales que $n \in \omega$, $\operatorname{dom}(p) \in [X]^{<\aleph_0}$ y $p(x) \in n$ para cada $x \in \operatorname{dom}(p)$. Y donde $\langle p, m\rangle \leq \langle q, n\rangle$ si $m \geq n$, $\operatorname{dom}(q) \subseteq \operatorname{dom}(p)$,

$$(\forall x \in \operatorname{dom}(q))\,(p(x) \cap n = q(x))$$

y

$$(\forall x, y \in \operatorname{dom}(q))\,(x < y \Rightarrow (p(x) \setminus q(x)) \subseteq n).$$

El Lema del Δ-sistema puede ayudar a demostrar que $\mathbb{P}$ es c.c.c.

(4) (Pável) Suponga $\mathsf{MA}(\kappa)$. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son medibles según Lebesgue y $|\mathcal{A}| = \kappa$. Demuestre que $\bigcup \mathcal{A}$ es medible según Lebesgue y que $\mu(\bigcup \mathcal{A}) = \mu(\bigcup \mathcal{B})$ para algún $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ numerable.

(5) (Iván) Suponga $\mathsf{MA}(\aleph_1)$. Sea $A_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ medible según Lebesgue, para $\alpha < \omega_1$, con $\mu(A_\alpha) > 0$. Demuestre que para algún subconjunto no numerable X de ω_1, $\mu\left(\bigcap_{\alpha \in X} A_\alpha\right) > 0$. Sugerencia: Si para cada $\alpha < \omega_1$ se tuviera $\mu(A_\alpha) > \varepsilon$, sea

$$\mathbb{P} = \left\{s \subseteq \omega_1 : |s| < \aleph_0 \;\&\; \mu\left(\bigcap_{\alpha \in s} A_\alpha\right) > \varepsilon\right\}.$$

[1] En la notación $p; \omega \to \omega$ observe el ";" en lugar de ":" usado para denotar funciones totales.

Demuestre que $\mathbb{P}$ es c.c.c. y use otro de los ejercicios de esta lista.

(6) (David) Suponga $\mathsf{MA} + \neg\mathsf{CH}$. Sea $\mathcal{F}$ una familia de menos que $\mathfrak{c}$ subconjuntos de ω tal que la intersección de cada subfamilia finita de elementos de $\mathcal{F}$ es infinita. Demuestre que existe un subconjunto infinito $D \subseteq \omega$ tal que D es una pseudointerseción de $\mathcal{F}$; es decir, $D \setminus F$ es finito para cada $F \in \mathcal{F}$. A este resultado se le conoce como el *Lema de Booth* o como el principio $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.