Tarea I

6. *Demuestre que si $\kappa \leq \alpha \leq \kappa^+$, entonces existen $X_n \subseteq \alpha$ con $n \in \omega$, tales que $\alpha = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ y $type(X_n) \leq \kappa^n$.*

Demostración

Por inducción sobre α.

Para $\alpha = \kappa$ se cumple que $\kappa \leq \kappa \leq \kappa^+$ y $\emptyset$,$\kappa \subseteq \kappa$ entonces podemos escribir $\kappa = \emptyset \cup \kappa \cup \emptyset \cup \cdots$. Además $type(\kappa) \leq \kappa$.

Supongamos que se cumple para β:

a) Sea ζ sucesor, $\zeta = s(\beta)$. Por hipótesis se tiene que $\beta = \bigcup_{n\in\omega} X_n$. Sea $\widetilde{X_0} = \{\beta\}$ y $\widetilde{X_{i+1}} = X_i$ para $i \in \omega$. Por hipótesis se cumple que $type(\widetilde{X_n}) \leq \kappa^n$ y además es claro que también se cumple que $type(\beta) \leq \kappa^n$.

b) Sea ζ límite. Tenemos que $cf(\zeta) \leq \kappa$. Por hipótesis, para cada α_i se tiene $\alpha_i = \bigcup_{n\in\omega} X(\alpha_i, n)$. Entonces para cubrir a ζ es necesario tomar una sucesión cofinal. Sea $(\alpha_i)_{i\leq cf(\zeta)}$ sucesión cofinal creciente. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\widetilde{X_0} = \emptyset$$

$$\widetilde{X_1} = \bigcup_{n\in\omega} X\big(a_{n+1}, 0) \setminus \alpha_n\big)$$

$$\vdots$$

$$\widetilde{X_i} = \bigcup_{n\in\omega} X\big(a_{n+1}, i-1) \setminus \alpha_n\big)$$

Para el tipo de orden se tiene que $type(\widetilde{X_0}) = 1$, $type(\widetilde{X_1}) = \kappa$ y para $\widetilde{X_2}$ es unión de κ segmentos de longitud menor que κ, así $type(\widetilde{X_2}) \leq \kappa^2$. Entonces, se tiene que, $type(\widetilde{X_n}) \leq \kappa^n$. $\square$