Demuestre que el Axioma de elección (AE) es equivalente a: Cualquier función perfecta de un espacio topológico en otro tiene una restricción irreducible a un subespacio cerrado de su dominio. (Llamemos a este enunciado *Prop*)

Prueba: $AE \Rightarrow Prop$

Sea $f : X \to Y$ una función perfecta. Sea $\mathcal{A} = \{C \subseteq X : f[C] = Y \, y \, C \, cerrado\}$

Consideremos el orden parcial: $< \mathcal{A}, \supseteq >$

Sea $\mathcal{C}$ una cadena no vacía contenida en $\mathcal{A}$. Veamos que $\mathcal{C}$ es acotada, por $\bigcap \mathcal{C}$, para lo cual veamos que éste último es un elemento de $\mathcal{A}$. (Observese que es la intersección de una familia no vacía de conjuntos, por lo que esta bien definida).

$\bigcap \mathcal{C}$ es un conjunto cerrado (por ser la intersección de conjuntos cerrados). Ahora veamos que $f[\bigcap \mathcal{C}] = Y$, Claramente la contención de izquierda a derecha se cumple, así que veamos la otra contención.

Sea $y \in Y$. Dado que cada $C \in \mathcal{C}$ es cerrado, entonces $f^{-1}[y] \cap C$ es cerrado en $f^{-1}[y]$. Si probamos que la colección $\{C \cap f^{-1}[y] : C \in \mathcal{C}\}$ de cerrados en $f^{-1}[y]$ tiene la propiedad de la intersección finita, por ser compacto (pues $f$ es perfecta) entonces la intersección será no vacía. Es decir:

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \cap f^{-1}[y] \neq \phi$$

Pero

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \cap f^{-1}[y] = f^{-1}[y] \cap \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \phi$$

Por lo tanto, hay un $z \in \bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ tal que $f(z) = y$, y por lo tanto , $y \in f[\bigcap \mathcal{C}]$ lo que significa que $Y \subseteq f[\bigcap \mathcal{C}]$ de lo cual se sigue que $\bigcap \mathcal{C} \in \mathcal{A}$ (pues es un elemento de $\mathcal{A}$ porque es cerrado y su imagen es todo $Y$).

Así pues, probemos que la colección

$$\{C \cap f^{-1}[y] : C \in \mathcal{C}\}$$

tiene la propiedad de la intersección finita.

Sean $C_1 \cap f^{-1}[y], \ldots, C_n \cap f^{-1}[y] \in \{C \cap f^{-1}[y] : C \in \mathcal{C}\}$

$$(C_1 \cap f^{-1}[y]) \cap \cdots \cap (C_n \cap f^{-1}[y]) = (C_1 \cap \cdots \cap C_n) \cap f^{-1}[y]$$

Ahora, dado que $C_i \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es cadena, hay alguno que es mayor que todos (de acuerdo al orden dado) es decir, hay algun $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $C_j \subseteq C_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$(entonces $C_j \subset (C_1 \cap \cdots \cap C_n)$ )

Por lo tanto

$$C_j \cap f^{-1}[y] \subseteq (C_1 \cap \cdots \cap C_n) \cap f^{-1}[y] = (C_1 \cap f^{-1}[y]) \cap \cdots \cap (C_n \cap f^{-1}[y])$$

Y como por hipótesis, $C_j \cap f^{-1}[y] \neq \phi$, (pues la imagend de $C_j$ es $Y$) entonces $(C_1 \cap f^{-1}[y]) \cap \cdots \cap (C_n \cap f^{-1}[y]) \neq \phi$, lo que significa que el conjunto en cuestión tiene la propiedad de la intersección finita.

Finalmente, ya vimos que toda cadena no vacía en $\mathcal{A}$ es acotada de acuerdo al orden dado (la contención inversa) por lo tanto, por el lema de Zorn, hay un elemento maximal. Este elemento maximal es un conjunto cerrado cuya imagen es $Y$. Como es maximal respecto al orden inverso, significa que cualquier subconjunto de $X$ cerrado mayor con este orden (es decir, cualquier subconjunto cerrado) no tendra como imagen a todo $Y$. Ese conjunto maximal es el subespacio buscado.