TAREA I
EJERCICIO 3.

Si κ es el mínimo cardinal tal que $\aleph_\kappa = \kappa$, entonces κ no es débilmente inaccesible.

Prueba :

Encontremos primero al primer punto fijo de la funcional $\aleph$.

Definimos recursivamente una funcional F:

$F(0) = \omega$

$F(n+1) = \aleph_{F(n)}$

Sea $\kappa = \bigcup_{n\in\omega} F(n)$

Afirmamos que:

1. $\aleph_\kappa = \kappa$
2. Si $\lambda \in CAR$ es tal que $\aleph_\lambda = \lambda$, entonces $\kappa \leq \lambda$.

Para 1. observemos que como κ es límite,

$\aleph_\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} \aleph_\alpha = \bigcup_{\alpha\in \bigcup_{n\in\omega} F(n)} \aleph_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} \aleph_{F(n)} = \bigcup_{n\in\omega} F(n+1) = \kappa$

Para 2. sea $\lambda \in CAR$ tal que $\aleph_\lambda = \lambda$. Para ver que $\kappa \leq \lambda$ basta ver que para cada $n \in \omega, F(n) \subseteq \lambda$, y lo probaremos por inducción:

- $F(0) = \aleph_0 \subseteq \lambda$.
- Si $F(n) \subseteq \lambda$, entonces $\aleph_{F(n)} \subseteq \aleph_\lambda$. Así, $F(n+1) = \aleph_{F(n)} \subseteq \aleph_\lambda = \lambda$.

Por lo tanto, $\kappa = \bigcup_{n\in\omega} F(n) \subseteq \lambda$, es decir $\kappa \leq \lambda$.

Por otro lado, como $\kappa = \bigcup_{n\in\omega} F(n)$, y $F(n) < \kappa$ para cada $n \in \omega$, entonces $cf(\kappa) = \omega < \kappa$.

Por lo tanto κ no es regular. Por lo tanto κ no es débilmente inaccesible.