Ejercicios 1
Topología Marzo - Agosto, 2007.

1. Sea X un conjunto no vacío. Entonces $\tau_f = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre X. Al espacio (X, τ) se le suele llamar *espacio cofinito.*

2. Sea X un conjunto no vacío. Entonces

$$\tau_c = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es a lo más numerable}\} \cup \{\emptyset\}$$

es una topología sobre X. Al espacio (X, τ) se le suele llamar *espacio conumerable*. ¿Es la familia

$$\tau_\infty = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es infinito}\}$$

una topología sobre X?

3. Sea $X = \{0, 1, \}$ y sea $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}\}$. Entonces τ es una topología sobre X y el espacio (X, τ) se le conoce como espacio de Sierpiński.

4. (a) Si $\{\tau_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de topologías sobre un conjunto no vacío X, entonces $\bigcap_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ es una topología sobre X. ¿Es $\bigcup_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ una topología?

   (b) Si $\{\tau_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de topologías sobre un conjunto no vacío X, entonces hay una única topología $\subseteq$-mínima que contiene a cada τ_α para $\alpha \in I$ y hay una $\subseteq$-máxima topología, única, que está contenida en cada τ_α, para cada $\alpha \in I$.

   (c) Si $X = \{0, 1, 2\}$ y $\tau_0 = \{\emptyset, X, \{0\}, \{0, 1\}\}$ y $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1, 2\}\}$, encuentre las topologías de que habla la parte anterior.

5. Sea (X, τ) un espacio. Entonces un subconjunto A de X es un conjunto abierto si y sólo si $A = \overset{\circ}{A}$.

6. Sea (X, τ) un espacio. Entonces un subconjunto A de X es un conjunto cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.

7. En clase vimos que $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : x_0 \in U\}$ es una topología sobre cualquier conjunto X tal que $x_0 \in X$. Muestre que cualquier $x \in X \setminus \{x_0\}$ es un punto límite de X y que la clausura de cualquier abierto no vacío es X.

8. Sean (X, τ) un espacio y $A \subseteq X$. Entonces A es cerrado si todo punto clausura de A pertenece a A.

9. Sea (X, τ) un espacio. Un subconjunto abierto U de un espacio X se llama *abierto regular* si $\overset{\circ}{\overline{U}} = U$. Entonces:

(a) $\overset{\circ}{\overline{A}}$ es un abierto regular para cada $A \subseteq X$,

(b) si U y V son abiertos regulares, entonces $U \cap V$ también lo es.

(c) si U y V son abiertos regulares, entonces $U \cup V$ no necesariamente es un abierto regular.

10. Sean (X, τ) un espacio y $A \subseteq X$. Entonces $\overline{A} = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$.

11. Sean (X, τ) un espacio y $A, B \subseteq X$. Entonces $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. De un ejemplo que muestre que la igualdad puede no ser cierta.

12. Sean (X, τ) un espacio y F un subconjunto cerrado de X. Entonces $F = \operatorname{int}(F) \cup \partial F$ y $\operatorname{int}(F) = \operatorname{int}\left(\overline{\operatorname{int}(F)}\right)$.

13. El orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$ está dado por:

$$\langle a, b\rangle \leq \langle x, y\rangle \text{ si y sólo si } a < x \text{ o } a = x \;\&\; b \leq y.$$

Considere la topología inducida por el orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$ y encuentre la clausura, el interior, los puntos límite y los puntos aislados de $I_1 = [0,1] \times [0,1]$, $I_0 = [0,1] \times (0,1)$. Demuestre también que existe una familia no numerable de abiertos ajenos por pares; concluya de aquí que $\overline{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}^2$.

14. Considere ahora el cuadrado unitario $I_1 = [0,1] \times [0,1]$ con el orden lexicográfico restringido y con la topología del orden sobre este. ¿Cuál es la cerradura y el interior de $[0,1] \times \{0\}$? ¿Cuáles de sus puntos son puntos límite o aislados?

15. Un subconjunto N de un espacio (X, τ) es denso en ninguna parte si y sólo si para todo abierto no vacío U de X existe un abierto no vacío $V \subseteq U$ tal que $V \cap N = \emptyset$.