Ejercicios 10
Topología Marzo - Agosto, 2007.

1. (a) Sean τ_0 y τ_1 dos topologías sobre un conjunto X tales que $\tau_0 \subseteq \tau_1$. ¿Qué se puede decir sobre la compacidad de X con respecto a las dos topologías?

   (b) Si X es Hausdorff y compacto con ambas topologías, entonces o bien $\tau_0 = \tau_1$ o ellas no son compatibles.

2. Todo subconjunto compacto de un espacio métrico es acotado con esa métrica y es también cerrado. Encuentre un espacio métricoen el cual no todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.

3. Considere el espacio producto $X \times Y$ donde Y es compacto. Si N es un conjunto abierto de $X \times Y$ tal que $\{x_0\} \times Y \subseteq N$, para algún $x_0 \in X$, entonces existe una vecindad W de x_0 tal que $N \supseteq W \times Y$.

4. Sea $f : X \to Y$, siendo Y compacto y Hausdorff. Entonces f es continua si y sólo si la gráfica de f,
$$G_f = \{\langle x, f(x)\rangle : x \in X\},$$
es un subconjunto cerrado de $X \times Y$.

5. Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos cerrados y conexos de X la cuala está linealmente ordenada por la inclusión. Entonces $Y = \bigcap \mathcal{A}$ es conexo y no vacío.

6. Un espacio se llama *numerablemente compacto* si cualquier cubierta abierta numerable tiene una subcubierta finita.

   Todo espacio compacto es numerablemente compacto; pero hay espacios numerablemente compactos que no son compactos. Uno de ellos es ω_1 con su topología del orden.

7. Un espacio X es numerablemente compacto si y sólo si toda familia numerable de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

8. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

   (a) El espacio X es numerablemente compacto.

(b) Cualquier familia localmente finita de subconjuntos no vacíos es finita.

(c) Cualquier familia localmente finita de subconjuntos de X consistentes de un punto es finita.

(d) Cualquier subconjunto infinito tiene un punto de acumulación.

(e) Todo subconjunto numerable de X tiene un punto de acumulación.

9. Si X es numerablemente compacto y Y es compacto, entonces $X \times Y$ es numerablemente compacto. (Hay ejemplos de espacios numerablemente compactos cuyo producto no es numerablemente compacto. Por ahora necesitamos más herramientas para construir tales espacios.)

10. Un espacio Hausdorff X es *secuencialmente compacto* si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.

    Cualqueir espacio secuencialmente compacto es numerablemente compacto. (Pronto conoceremos un espacio que es compacto pero que no es secuencialmente compacto.)

11. Si X es primero numerable y numerablemente compacto, entonces X es secuencialmente compacto.

12. (El Lema del número de Lebesgue) Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de un espacio métrico (X, d). Si X es compacto, existe $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto de X teniendo diámetro menor que δ está contenido en un elemento de $\mathcal{A}$.

13. El producto cartesiano de una familia numerable de espacios secuencialmente compactos es secuencialmente compacto.

14. Si X es numerablemente compacto y Y es secuencialmente compacto, entonces $X \times Y$ es numerablemente compacto.

15. Para un espacio métrico las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    (a) X es compacto.

    (b) X es numerablemente compacto.

    (c) X es secuencialmente compacto.

16. Un producto topológico $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es localmente compacto si y sólo si X_α es localmente compacto para todo $\alpha \in I$ y existe un conjunto finito $J \subseteq I$ tal que X_α es compacto para todo $\alpha \in I \setminus J$.

17. Cualquier subespacio localmente compacto M de un espacio Hausdorff X es un subconjunto abierto de la clausura $\overline{M}$ en el espacio X; es decir puede representarse en la forma $F \cap U$ donde F es un cerrado en X y U es un abierto en X.