Ejercicios 11
Topología Marzo - Agosto, 2007.

1. En un espacio T_1 y primero numerable cualquier conjunto con un punto es un conjunto G_δ.

2. Sea X un espacio Hausdorff y primero numerable y sean $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\langle a_n : n \in \omega \rangle$ de términos en A tal que $a_n \to x$.

3. Sea X un espacio Hausdorff y primero numerable y sea $f : X \to Y$ una función. Entonces f es una función continua si y sólo si, para todo $x \in X$, se tiene que $f(x_n) \to f(x)$ para cada sucesión $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ de términos en X que converge a x.

4. Si X es un espacio segundo numerable y A es un subconjunto no numerable, entonces :

   (a) El subespacio A de X no es discreto.

   (b) El conjunto A contiene ana cantidad no numerable de sus puntos límite.

5. Si X es segundo numerable y $\mathcal{A}$ es una base para la topología de X entonces $\mathcal{A}$ contiene una base numerable.

6. Si X es un espacio segundo numerable, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (a) X es compacto,

   (b) X es numerablemente compacto,

   (c) X es secuencialmente compacto.

7. ¿Es $I \times I$ metrizable con la topología del orden lexicográfico? Aquí $I = [0, 1]$.

8. Si X es un espacio Lindelöf y Y es compacto, entonces $X \times Y$ es un espacio Lindelöf? ¿Puede debilitarse a que Y es sólo numerablemente compacto? ¿Qué tal Y secuencialmente compacto?

9. Sea $C_\infty(X,\mathbb{R})$ el conjunto de funciones continuas con valores reales equipado con la siguiente métrica:

$$\varrho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

para cada $f, g \in C_\infty(X,\mathbb{R})$.

10. El subespacio X del cubo de Tychonoff $I^{\mathfrak{c}} = \prod_{t\in I} I_t$, donde $I_t = I$ para cada $t \in I$, consistente de todas las funciones no decrecientes de I en I es llamado el *espacio de Helly.*

    (a) El espacio de Helly es compacto.

    (b) El espacio de Helly contiene un subespacio discreo de cardinalidad $\mathfrak{c}$ y un subespacio homeomorfo a la recta de Sogenfrey $\mathbb{R}_\ell$.

    (c) El espacio de Helly es primero numerable.

    (d) El espacio de Helly es separable.