Ejercicios 12
Topología Marzo - Agosto, 2007.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera. Entonces el conjunto de puntos donde f es continua es un conjunto G_δ. Concluya que no exite una función continua exáctamente sobre $\mathbb{Q}$. ¿Hay una que sea continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

2. Un espacio métrico X es *totalmente acotado* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $F \subseteq X$ tal que $X = \bigcup \{B(x;\varepsilon) : x \in F\}$.

   Un espacio métrico X es compacto si y sólo es completo y totalmente acotado.

3. Toda métrica sobre un espacio compacto es completa.

4. Se dice que dos métricas d_0 y d_1 sobre un conjunto X son *equivalentes* si ellas generan la misma topología sobre X.

   Dos métricas d_0 y d_1 sobre un conjunto X son equivalentes si y sólo si ellas inducen las mismas sucesiones convergentes.

5. Un espacio X es un *espacio de Baire* si $\bigcup_{n\in\omega} N_n$ tiene interior vacío para cualquer colección $\{N_n : n \in \omega\}$ de conjuntos cerrados con interior vacío

   Cualquier subespacio abierto de un espacio de Baire es un espacio de Baire.

6. Si cada punto de X tiene una vecindad que es un espacio de Baire, entonces X es un espacio de Baire.

7. Si Y es un subespacio G_δ de un espacio Hausdorff y compacto o un espacio métrico completo, entonces Y es un espacio de Baire.

8. ¿Es $\mathbb{R}_\ell$ un espacio de Baire?

9. ¿Es R^κ un espacio de Baire? Aquí κ es un cardinal infinito.

10. Si A es cualquier conjunto G_δ entonces existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es continua exáctamente sobre A.

11. Sea $D(\kappa)$ el espacio discreto de cardinalidad $\kappa \geq \aleph_0$. Sea $B(\kappa) = [D(\kappa)]^{\aleph_0}$. Entonces lo siguiente define una métrica sobre $B(\kappa)$: Para

cada $x, y \in B(\kappa)$ sea

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & \text{si } x \neq y \ \& \ k = \min\{n \in \omega : x(n) \neq y(n)\} \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

A $B(\kappa)$ con esta métrica se le llama el *espacio de Baire de peso* κ. Una sucesión $\langle x_m : m \in \omega \rangle$ en $B(\kappa)$ converge a un punto $x \in B(\kappa)$ si y sólo si para cada $i \in \omega$ existe $k_i \in \omega$ tal que $x(i) = x_m(j)$ para cada $j \geq k_i$.

12. Sea d la métrica discreta sobre $D(\kappa)$ y sea

$$\sigma(x, y) = \sum_{n \in \omega} \frac{1}{2^n} d(x(n), y(n)),$$

para cada $x, y \in B(\kappa)$. Se sabe que σ define otra métrica sobre $B(\kappa)$. Entonces una sucesión $\langle x_m : m \in \omega \rangle$ en $B(\kappa)$ converge a un punto $x \in B(\kappa)$ si y sólo si para cada $i \in \omega$ existe $k_i \in \omega$ tal que $x(i) = x_m(j)$ para cada $j \geq k_i$; es decir, la misma condición del ejercicio anterior. Concluya que σ y ϱ son métricas equivalentes sobre $B(\kappa)$.

13. El espacio de Baire $B(\omega)$ es homeomorfo al subespacio de los números irracionales de $\mathbb{R}$.