Ejercicios 2
Topología Marzo - Agosto, 2007.

1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto N de X es denso en ninguna parte si el complemento de la cerradura de N es un conjunto denso.

2. Cualquier subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ (con su topología usual) es la frontera de algún conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

3. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se llama *localmente finita* si para cada $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que $\{A \in \mathcal{A} : U \cap A \neq \emptyset\}$ es finito. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se llama *punto finita* si $\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ es finito para cada $x \in X$. Toda familia que es localmente finita es también una familia punto finita pero hay familias punto finitas que no son localmente finitas.

4. Si $\mathcal{A}$ es una familia localmente finita, entonces la familia
$$\left\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\right\}$$
también es localmente finita.

5. Existen familias $\mathcal{A}$ que no son localmente finitas pero que $\left\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\right\}$ sí es localmente finita.

6. ¿Existen familias $\mathcal{A}$ que sean punto finitas pero que $\left\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\right\}$ no lo sea?

7. Si $\mathcal{A}$ es una familia localmente finita entonces
$$\overline{\bigcup \mathcal{A}} = \bigcup \left\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\right\}.$$

8. Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos cerrados que es localmente finita, entonces $\bigcup \mathcal{F}$ es un cerrado.

9. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases para dos topologías τ y τ' sobre un conjunto $X \neq \emptyset$. Entonces las siguientes son equivalentes:

   (a) τ es más débil que τ'.

   (b) Para cada $x \in X$ y cada básico $B \in \mathcal{B}$ conteniendo a x existe un básico $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B$.

10. Considere las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$\mathcal{B}_0 = \{(a, b) : a \leq b\}$,

$\mathcal{B}_1 = \{[a, b) : a < b\} \cup \{\emptyset\}$,

$\mathcal{B}_2 = \{(a, b] : a < b\} \cup \{\emptyset\}$,

$\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_0 \cup \{B \setminus K : B \in \mathcal{B}_0\}$, donde $K = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$,[1]

$\mathcal{B}_4 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$,

$\mathcal{B}_5 = \{B : |\mathbb{R} \setminus B| < \omega\}$.

   (a) Cada $\mathcal{B}_i$, para $i \in 6$, es base para una topología sobre $\mathbb{R}$. En especial, al espacio que resulta con la base $\mathcal{B}_1$ le llamaremos *recta de Sorgenfrey* y lo denotaremos por $\mathbb{R}_\ell$.

   (b) Compare las topologías resultates.

   (c) En clase vimos que la topología usual es la que resulta de considerar la base $\mathcal{B}_0$. También notamos que esta, la topología usual, tiene una base numerable. ¿Cuáles de las otras topologías tienen también bases numerables?

11. Cualquier espacio que tiene una base numerable para su topología contiene un subconjunto numerable que es denso.

12. En $\mathbb{R}$ cada conjunto abierto es unión a lo más numerable de intervalos abiertos y ajenos por pares.

13. (Este ejercicio es para quienes ya hayan cursado teoría de conjuntos.) En $\mathbb{R}$ los conjuntos abiertos son conjuntos de tipo F_σ. La familia de todos los conjuntos de Borel en los reales puede ser representada como la unión $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{F}_\alpha$, donde $\mathcal{F}_0$ is la familia de todos los conjuntos cerrados y $\mathcal{F}_\alpha$ consiste de o bien todas las uniones a lo más numerables de miembros de $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{F}_\xi$ para ordinales nones α o todas las intersecciones a lo más numerables de miembros de $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{F}_\xi$ para ordinales pares α. Las familias $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha < \omega_1$, tienen cardinalidad $\mathfrak{c}$. Deduzca de aquí que en la línea real hay conjuntos que no son conjuntois de Borel.

[1] Para mi ω es el primer ordinal infinito y $\mathbb{N}$ es el conjunto de los enteros positivos; así $\omega = \{0\} \cup \mathbb{N}$.