Ejercicios 3
Topología Marzo - Agosto, 2007.

1. Sea X el espacio de Sierpiński (ver Ejercicios 1) y sea 2 el espacio discreto $\{0,1\}$. Muestre que si f es la función identidad $f : X \to 2$, enotnces f no es continua pero que f^{-1} sí lo es.

2. Sea X un conjunto parcialmente ordenado por $\leq$. Defina $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si U satisface la siguiente condición: $x \in U$ & $y \leq x \Rightarrow y \in U$. Verifique que esto define una topología y que $f : X \to X$ es continua si y sólo si f preserva el orden.

3. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función entonces f es continua si y sólo si $\partial\left(f^{-1}[B]\right) \subseteq f^{-1}[\partial B]$ para cada $B \subseteq Y$.

4. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Si B es un conjunto de tipo G_δ (o de tipo F_σ), entonces $f^{-1}[B]$ es del mismo tipo.

5. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función entonces decimos que la función f es *abierta* si para cada conjunto abierto $U \subseteq X$ se tiene que $f[U]$ es un subconjunto abierto de Y. Análogamente se define función cerrada. Dar ejemplos de los siguientes tipos de funciones:

   (a) una función continua que no es una función abierta,
   (b) una función continua que no es una función cerrada,
   (c) una función abierta que no sea continua,
   (d) una función cerrada que no sea continua,
   (e) una función continua y abierta pero no un homeomorfismo,
   (f) una función continua y abierta pero no cerrada.

6. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función entonces f es una función cerrada y continua si y sólo si $f\left[\overline{A}\right] = \overline{f[A]}$ para todo $A \subseteq X$.

7. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función biyectiva entonces los siguientes son equivalentes:

   (a) f es un homeomorfismo.
   (b) f es continua y abierta.
   (c) f es continua y cerrada.
   (d) $f\left[\overline{A}\right] = \overline{f[A]}$ para todo $A \subseteq X$.

8. Si p es un polinomio entonces $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y cerrada.

9. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función biyectiva y continua, entonces f es una función abierta.

10. Sea $p : X \to Y$ una función que es abierta y es cerrada. Sea $\varphi : X \to [0,1]$ una función continua y para cada $y \in Y$ sea

$$\widehat{\varphi}(y) = \sup\left(\varphi\left[p^{-1}[y]\right]\right).$$

Entonces $\widehat{\varphi} : Y \to [0,1]$ es una función continua.

11. Cualqueir espacio discreto y numerable es imagen continua de la recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_\ell$; pero ningún espacio discreto y no numerable lo puede ser.

12. Sea X un espacio discreto y sea $A(X)$ el espacio que se definió en la clase del día jueves 29 de marzo. Si un espacio Y es imagen continua de $A(X)$ bajo una función cerrada, entonces Y es homeomorfo a $A(Z)$, donde Z es un espacio discreto con $|Z| \leq |X|$.

13. Sea X un espacio discreto. Una función continua y sobreyectiva $f : A(X) \to Y$ es cerrada si y sólo si para cada par de puntos $y_0, y_1 \in Y$ existen abiertos $U_0, U_1 \subseteq Y$ tales que $y_i \in U_i$, $i \in 2$, y $U_0 \cap U_1 = \emptyset$.