Ejercicios 4
Topología Marzo - Agosto, 2007.

1. Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un conjunto X y $Y \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} \cap \wp(Y)$ es un filtro sobre Y.

2. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X y $f : X \to Y$ es una función, entonces
$$f_*(\mathcal{U}) = \left\{V \subseteq Y : f^{-1}[V] \in \mathcal{U}\right\}$$
es un ultrafiltro sobre Y.

3. Supóngase que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros sobre X. Entonces
$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = \{U \subseteq X \times X : \{x \in X : \{y \in X : \langle x, y\rangle \in U\} \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}\}$$
es un filtro sobre $X \times X$.

4. Sea X un espacio. Un filtro $\mathcal{F}$ converge a un punto $p \in X$ si y sólo si para cualquier filtro $\mathcal{G}$ con $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ se tiene que p es un punto de acumunación de $\mathcal{G}$.

5. Si X es un espacio y $A \subseteq X$, entonces un punto $p \in X$ es elemento de $\overline{A}$ si y sólo si existe una base para filtro consistente de subconjuntos de A de modo que el filtro que ésta genera converge a p.

6. Si X es un espacio y $A \subseteq X$, entonces un punto $p \in X$ es elemento de $\operatorname{int}(A)$ si y sólo si A es elemento de cualquier filtro que converge a p.

7. Un espacio X tiene la propiedad de que dados dos puntos cualesquiera existen vecindades ajenas de ellos si y sólo si todo filtro sobre X tiene a lo más un punto de convergencia.