Ejercicios 5
Topología Marzo - Agosto, 2007.

1. Si Y es un subespacio de un espacio X y A es un subconjunto de Y, entonces

$$\operatorname{int}_Y(A) = Y \setminus \overline{Y \setminus A} \quad \text{y} \quad \partial_Y(A) = Y \cap \overline{A} \cap \overline{Y \setminus A},$$

donde la barra denota al operador clausura en el espacio X.

2. Si la composición $g \circ f$ de funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ es cerrada (abierta), entonces la restricción $g \restriction f[X] : f[X] \to Z$ es cerrada (abierta). Dar un ejemplo de funciones f y g que no sean cerradas (abiertas) pero que $g \circ f$ sí es cerrada (abierta).

3. Si $f : X \to Y$ es una función continua y $M \subseteq X$, entonces

$$f \restriction M : M \to Y$$

también es continua.

4. Si $f : X \to Y$ es una función cerrada, entonces para cualquier subespacio M de X se tiene que la restricción $f \restriction M$ es una función cerrada.

5. Una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si cada $x \in X$ tiene una vecindad U tal que $f \restriction U$ es continua.

6. Si X es un espacio, un subconjunto Y de X se llama *retracto* si existe una función $f : X \to X$ tal que $f \circ f = f$ y $f[X] = Y$.

   Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (a) Y de X es un retracto.

   (b) Cualquier función continua definida en Y es continuamente extendible a todo X.

   (c) Existe una función continua $r : X \to Y$ tal que $r \restriction Y = id_Y$.

7. Demuestre que la recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_\ell$ es hereditariamente separable.