Ejercicios 6
Topología Marzo - Agosto, 2007.

1. El conjunto $\prod_{s\in S} A_s$, donde $\emptyset \neq A_s \subseteq X_s$, es cerrado en el producto $\prod_{s\in S} X_s$ si y sólo si A_s es cerrado en X_s para todo $s \in S$.

2. Sean $\{X_s : s \in S\}$ una familia no vacía de espacios y $\varphi : S \to S$ una biyección. Entonces los espacios $\prod_{s\in S} X_s$ y $\prod_{s\in S} X_{\varphi(s)}$ son homeomorfos.

3. Sea $\{X_s : s \in S\}$ una familia no vacía de espacios y sea $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ una sucesión de puntos en el producto $\prod_{s\in S} X_s$. Entonces la sucesión $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ converge a un punto $x \in \prod_{s\in S} X_s$ si y sólo si $\pi_s(x_n)$ converge a $\pi_s(x)$ para cada $s \in S$. ¿Es esto cierto si cambiamos a la topología producto por la topología caja?

4. Dado $f \in \mathbb{R}^X$ se define el *soporte* de f como el conjunto

$$\operatorname{supp}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

   Considere $\sigma\mathbb{R}^\omega = \{f \in \mathbb{R}^\omega : |\operatorname{supp}(f)| < \aleph_0\}$. ¿Cuál es la clausura de $\sigma\mathbb{R}^\omega$ con respecto a la topología caja y a la topología producto?

5. Sean Y un conjunto, $\{X_s : s \in S\}$ una familia no vacía de espacios y sea $\{f_s : s \in S\}$ una familia de funciones $f_s : Y \to X_s$.

   (a) Hay una única topología más gruesa τ sobre Y relativa a la cual cada función f_s es continua.

   (b) Sea $\mathcal{S}_s = \{f_s^{-1}[U] : U \text{ es abierto en } X_s\}$, y sea $\mathcal{S} = \bigcup_{s\in S} S_s$. Entonces $\mathcal{S}$ es una subbase para τ.

   (c) Una función $g : Z \to Y$ es continua, relativa a τ, si y sólo si $f_s \circ g$ es continua para cada $s \in \mathcal{S}$.

   (d) Sea $f : Y \to \prod_{s\in S} X_s$ definida por la ecuación

$$f(y) = \langle f_s(y) : s \in S\rangle$$

   y sea $Z = f[Y]$ como subespacio del producto $\prod_{s\in S} X_s$. Entonces la imagen de cada elemento de τ es un subconjunto abierto de Z.

6. En el producto topológico de espacios separables, cualquier familia de conjuntos abiertos, no vacíos y ajenos por pares es a lo más numerable.