Ejercicios 7
Topología Marzo - Agosto, 2007.

1. Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección en la primera coordenada.

   (a) Sean X el subespacio $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y sea $g = \pi_1 \restriction X$. Entonces g es una función cerrada pero no es una función abierta.

   (b) Sean Y el subespacio $(\overline{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y sea $h = \pi_1 \restriction Y$. Entonces h no es ni abierta ni cerrada, pero es una función cociente.

2. Defina una realación de equivalencia $\approx$ sobre $\mathbb{R}^2$ haciendo:

$$\langle x, , y \rangle \approx \langle u, v \rangle \text{ si y sólo si } x + y^2 = u + v^2.$$

   Sea $\mathcal{D}$ la colección de clases de equivalencia con la topología cociente $\tau_{\mathcal{D}}$. El espacio $(\mathcal{D}, \tau_{\mathcal{D}})$ es homeomorfo a una espacio familiar. ¿Cuál es?

3. Si una composición de funciones continuas $f \circ g$ es una función cociente, entonces f también es una función cociente.

4. Si para una función continua $f : X \to Y$ existe un conjunto $A \subseteq X$ tal que $f[A] = Y$ y la restricción $f \restriction A : A \to Y$ es una función cociente, entonces f es una función cociente.

5. Para una relación de equivalencia E sobre un espacio X las siguientes afirmaciones son equivalentes:[1]

   (a) La proyección natural $\pi : X \to X/E$ es cerrada (abierta).

   (b) Para cualqueir subconjunto cerrado A de X, la unión de todas las clases de equivalencia que intersectan a A es un cerrado (abierto) de X.

   (c) Para cualquier conjunto abierto (cerrado) U de X la unión de todos las clases de equivalencia que están contenidas en U es un abierto (cerrado) en X.

[1] X/E es una notación usual para denotar al conjunto cociente; es decir, al conjunto de clases de E-equivalencia.

6. Una función cociente $f : X \to Y$ es cerrada (abierta) si y sólo si el conjunto $f^{-1}[f[A]]$ es cerrado (abierto) para todo cerrado (abierto) $A \subseteq X$.

7. Para cualquier retracción $f : X \to X$, la restricción $f \upharpoonright X : X \to f[X]$ es una función cociente.

8. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia no vacía de espacios y para cada $\alpha \in J$ sea $p_\alpha : X_a \to Y$ una función, donde Y es un conjunto no vacío.

   (a) Hay una única topología más fina τ sobre Y relativa a la cual cada p_α es continua.

   (b) Una función $f : Y \to Z$ es continua relativa a τ si y sólo si $f \circ p_\alpha$ es continua para cada $\alpha \in J$.