Ejercicios 8
Topología Marzo - Agosto, 2007.

1. ¿Son conexos los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$?

   (a) $X = \{\langle x, y\rangle : y = 0\} \cup \left\{\langle x, y\rangle : x > 0 \ \& \ y = \frac{1}{x}\right\}$,
   (b) $Y = \{\langle x, y\rangle : x = 0\} \cup \left\{\langle x, y\rangle : x \neq 0 \ \& \ y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$.

2. Sean τ y τ' dos topologías sobre $X \neq \emptyset$ tales que $\tau \subseteq \tau'$. ¿Qué se implicaciones se pueden verificar respecto a la conexidad de X con respecto a las dos topologías?

3. Si $\{A_n : n \in \omega\}$ es una familia de subconjuntos conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. ¿Qué se puede decir de la conexidad de $\bigcup_{n\in\omega} A_n$?

4. ¿Es cierto que si X es conexo entonces para cualquier subconjunto propio y no vacío A se tiene que $\partial A \neq \emptyset$? ¿Qué se puede decir del recíproco?

5. Considere a $\mathbb{R}^\omega$ con la topología de la caja. Para responder sobre la conexidad de este espacio analice el conjunto de todas las sucesiones acotadas de números reales.

6. Demuestre el teorema del valor intermedio: si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $f(a) < f(b)$, entonces para todo $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < \xi < f(b)$ existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = \xi$.

7. ¿Será cierto que el hecho que todo intervalo en $\mathbb{R}$ es un conjunto conexo implica el Axioma del Supremo?

8. ¿Cómo serán las componentes conexas de un espacio: abiertas, cerradas, etc.? ¿Qué pasa si además agregamos que el espacio es localmente conexo?

9. Sea $L = [0, 1) \times \omega_1$ con la topología del orden lexicográfico. Este espacio se conoce como la *línea larga*. ¿Qué se puede decir sobre la conexidad y la conexidad por trayectorias de L? ¿Puede encajarse L en $\mathbb{R}$?

10. ¿Existirá un subcojunto de $\mathbb{R}^2$ que sea conexo por trayectorias pero que no sea localmente conexo en ninguno de sus puntos?