Ejercicios 9
Topología Marzo - Agosto, 2007.

1. Sea X un espacio T_0 y sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de X. Entonces $|X| \leq 2^{|\mathcal{B}|}$.

2. En un espacio X que es T_1, cualquier vecindad de un punto de límite de un conjunto A contiene infinitos puntos de A. También, el conjunto de todos los puntos límite de A es un conjunto cerrado.

3. Cualquier retracto[1] de un espacio Hausdorff es cerrado.

4. Sea $f : X \to Y$ una función continua, donde Y es un espacio Hausdorff. Entonces
$$\{\langle x, y\rangle \in X \times Y : y = f(x)\}$$
es un subconjunto cerrado de $X \times Y$.

5. Un espacio X es un espacio de Hausdorff si y sólo si $\Delta = \{\langle x, x\rangle : x \in X\}$ es cerrado en $X \times X$.

6. Si X es un espacio Hausdorff y D es un subconjunto denso de X, entonces $|X| \leq 2^{2^{|D|}}$.

7. Sea X un espacio T_1 y sea $\mathcal{D}$ una partición de X consistente de conjuntos cerrados. Entonces el espacio cociente $X/\mathcal{D}$ es un espacio T_1.

8. Sea $K = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ y sea X el conjunto $\mathbb{R}$ con la topología generada tomando como abiertos básicos a los siguientes: Cualquier intervalo abierto (a, b) y cualquier conjunto de la forma $(a, b) \setminus K$. Entonces X con esa topología es un espacio Hausdorff que no es regular.

9. Un conjunto B de un espacio normal X es un conjunto G_δ si y sólo si existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $B = \{x \in X : f(x) = 0\}$.

10. Un espacio X que es un espacio T_1 es también un espacio completamente regular si y sólo si existe una base $\mathcal{B}$ para la topología de X que satisface las siguientes condiciones:

    (a) Para todo $x \in X$ y para todo $U \in \mathcal{B}$ que contiene a x existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \notin V$ y $U \cup V = X$.

[1] Ver Ejercicios 5 para la definición de retracto.

(b) Para todo $U, V \in \mathcal{B}$ que satisfacen $U \cup V = X$, existen $U_0, V_0 \in \mathcal{B}$ tales que $X \setminus V \subseteq U_0$, $X \setminus U \subseteq V_0$ y $U_0 \cap V_0 = \emptyset$.

11. Un espacio X es *completamente (o hereditariamente) normal* si cualquier subespacio es normal. Un espacio T_1 X es completamente normal si y sólo si para cualquier par de conjuntos $A, B \subseteq X$ tales que $A \cap \overline{B} = \emptyset$ y $\overline{A} \cap B = \emptyset$ (es decir, que están separados), existen vecindades abiertas de ellos que son ajenas.

12. Sean X un espacio normal y $F \subseteq X$ que es cerrado. Entonces cualquier función continua $f : F \to [0,1]^n$ puede ser continuamente extendida a X.

13. Un espacio X que es T_1 es un espacio normal si y sólo si para cualquier cubierta abierta $\{U_0, U_1, \dots, U_n\}$ existe una cubierta abierta

$$\{V_0, V_1, \dots, V_n\}$$

tal que para cada $i \leq n$ se tiene que $\overline{V_i} \subseteq U_i$.

14. Si X es un espacio T_1 que es la unión finita de una familia de subespacios cerrados y normales, entonces X es normal.

15. Todo conjunto F_σ de un espacio normal es un subespacio normal.

16. Sean $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq \cdots$ una sucesión de espacios, donde cada X_n es un subespacio cerrado de X_{n+1}. Sea $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$. Supóngase que $U \subseteq X$ se define como abierto si y sólo si $U \cap X_n$ es abierto en X_n para cada $n \in \omega$. La topología así obtenida se llama la *topología coherente* de X con los subespacios X_n.

    (a) Si X tiene la topología coherente con una sucesión de espacios $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq \cdots$, entonces cada X_n es un subespacio de X.

    (b) Si cada subespacio X_n es normal, entonces X mismo es normal.

17. Si J es no numerable entonces $\mathbb{R}^J$ no es un espacio normal.