Ejercicios 2

1. Si X un k-espacio, entonces las componentes conexas por trayectorias de $C(X, Y)$ con la topología compacto abierta son las clases de homotopía.

2. Si una función continua $f : X \to Y$ tiene una inversa homotópica izquierda g y una inversa homotópica derecha h, entonces f es una equivalencia homotópica.

3. Si una de las funciones continuas $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y su composición $g \circ f : X \to Z$ son equivalencias homotópicas, entonces la otra función también lo es.

4. Un espacio X es conexo por trayectorias si y sólo si cualesquiera dos funciones constantes de X es sí mismo son homotópicas.

5. Si X es contraible, entonces cualquier función continua $f : X \to Y$ es homotópica a una función constante; si además Y es conexo por trayectorias, entonces cualesquiera dos funciones de X en Y son homotópicas.

6. Si X y Y son contraibles, entonces también $X \times Y$ es contraible.

7. La función identidad y la antipodal sobre S^n son homotópicas, para n impar.

8. Si $f, g : X \to S^n$ son continuas y $f(x) \neq g(x)$ para cada $x \in X$, entonces f y g son homotópicas. De lo anterior se sigue que las funciones que no son sobreyectivas son homotópicas a una función constante.

9. Sean $A \subseteq X$ y $f : X \to A$ continua que es homotópica a la función identidad de A. Si X es contraible, entonces A es contraible. De aquí se deduce que el retracto de un espacio contraible es contraible.

10. Un subespacio $A \subseteq X$ es un retracto de deformación de X si y sólo si para cada espacio X y cada función continua $f : A \to Y$ puede ser contiuamente extendida a X y cualesquiera dos funciones $g, h : X \to Y$ son homotópicas siempre que lo sean sus restricciones a A.

11. Si $C(X, Y)$ está equipado con la topología compacto abierta y $\eta : Y \to C(X, Y)$ es la inyección natural de Y en $C(X, Y)$; o sea. $\eta(y)(x) = y$ para todo $y \in Y$ y todo $x \in X$, entonces $\eta[Y]$ es un retracto de $C(X, Y)$.

12. Si X es un espacio Hausdorff y localmente compacto que además es contraible; entonces $\eta[Y]$ es un retracto de deformación fuerte de $C(X, Y)$, con la topología compacto abierta.

13. Sea $\Omega(X, x_0)$ el subespacio de $C(X, Y)$, con la topología compacto abierta, consistente de todos los lazos basados en x_0, entonces $\pi(X, x_0)$ es justamente el conjunto de componentes conexas por trayectorias de $\Omega(X, x_0)$.

14. Seam $f, g : I \to X$ dos caminos con punto inicial x_0 y punto final x_1. Entonces:

   a) $f \simeq g \text{ rel } \{0,1\}$ si y sólo si $f * g^{-1} \simeq e_{x_0} \text{ rel } \{0,1\}$,

   b) Si $f \simeq g \text{ rel } \{0,1\}$, entonces $f^{-1} \simeq g^{-1} \text{ rel } \{0,1\}$

15. ¿Cuál es el grupo fundamental de un espacio indiscreto?

16. Si $f, g : X \to Y$ son funciones homotópicos y $f(x_0) = g(x_0)$ para algún $x_0 \in X$; entonces los homomorfismos inducidos f_* y g_* difieren por un automorfismo interno de $\pi(Y, f(x_0))$.

17. Sean X y Y espacios, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Entonces
$$\pi(X \times Y, \langle x, y\rangle) \cong \pi(X, x_0) \oplus \pi(Y, y_0).$$

18. (Teorema del Punto Fijo de Brower) Una función continua $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ tiene al menos un punto fijo; o sea, $f(x) = x$ para algún $x \in \mathbb{D}^n$.

19. (El Teorema Fundamental del Álgebra) Cada polinomio no constante con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja.

20. Sea $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ un homeomorfismo. Entonces f transforma S^1 sobre sí mismo.

21. $S^1 \times \{x\}$ es un retracto del toro $S^1 \times S^1$; pero no es un retracto de deformación fuerte para ningún $x \in S^1$

22. Sea $\widetilde{X}$ el producto de un espacio X con un espacio discreto. Entonces la proyección de $\widetilde{X}$ sobre X es una función cubriente.

23. La función que a cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ le asigna z^n, donde $n \neq 0$, es una función cubriente.

24. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una función cubriente, siendo X un espacio localmente conexo por trayectorias. Entonces cada punto de X tiene una vecindad abierta y conexa por trayectorias U tal que cada componente conexa por trayectorias de $p^{-1}[U]$ es enviada por p de manera homeomorfa sobre U.

25. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una función cubriente, siendo X un espacio conexo. Entonces $\widetilde{X}$ es compacto si y sólo si X es compacto y la multiplicidad de p es finita.

26. (Teorema de Borsuk-Ulam) Si $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, para $n \geq 1$, es continua, entonces hay un punto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.

27. No hay una función continua $g : S^{n+1} \to S^n$, $n > 0$, la cual manda puntos antipodales a puntos antipodales.

28. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una función cubriente y $f : I \to X$ un lazo basado en x_0. Entonces:

   a) Si $f \simeq e_{x_0}$ rel $\{0, 1\}$, entonces cualquier levantamiento de f a un camino en $\widetilde{X}$ es un lazo y es homotópico a un lazo constante relativo al $\{0, 1\}$.

   b) Si f se levanta a un lazo en $\widetilde{X}$ que empieza en $\widetilde{x}_{x_0}$, entonces cualquier lazo homotópico a f relativo a $\{0, 1\}$ también se levanta en un lazo en $\widetilde{X}$ que empieza en $\widetilde{x}_{x_0}$.

29. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una función cubriente, donde $\widetilde{X}$ es conexo por trayectorias. Entonces p es un homeomorfismo si y sólo si $p_\sharp[\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})] = \pi(X, p(\widetilde{x_0}))$.

30. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una función cubriente con multiplicidadad n. Si $\widetilde{X}$ es simplemente conexo y n es primo, entonces $\pi(X, x_0)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

31. Dado un espacio conexo y localmente conexo por trayectorias X, una función continua $f : X \to S^1$ puede ser levantada a una función continua $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ relativo a la función exponencial si y sólo si f es homotópica a una función constante.

32. Ningún subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a S^n.

33. No hay ninguna función inyectiva y continua de $\mathbb{R}^{n+1}$ a $\mathbb{R}$ para cualquier $n \geq 1$.

34. Un espacio X se llama *localmente relativamente simplemente conexo* si para cada $x \in X$ hay una vecindad abierta U de x tal que el homomorfismo inducido por la función inclusión de U a X es trivial.

    Todo espacio X que es localmente relativamente simplemente conexo tiene un cubriente universal.

35. El producto infinito de S^1 no tiene un cubriente universal.