TOPOLOGÍA Y SUS APLICACIONES
2

J. JUAN ANGOA
JOSÉ ARRAZOLA
RAÚL ESCOBEDO
Editores

ALEJANDRO ILLANES
MAURICIO OSORIO
GUILLERMO SIERNA
ÁNGEL TAMARIZ
Comité Científico

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Cuerpo Académico de Topología y sus Aplicaciones

Primera edición, 2013
ISBN: 978 698 595 265 2

Dirección de Fomento Editorial
2 Norte 1404, CP 72000
Puebla, Pue.
Teléfono y fax 01 222 2 46 85 59

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

Estimado lector,
Topología y sus Apli
Las primeras se cons
diata anterior como '
y sus Aplicaciones 2
lugar para la difusiór
gación y la recreació

Este volumen se
miembros y colabora
municar que nuestra
nueve artículos de a
tenido abarca varios
continuos e hiperesp
que aquí se exponen
iniciar la investigació
referencia para los es
que en este libro enc

Agradecemos sin
exponer sus trabajos;
autores y árbitros, co
darle vida a este proy

CAPÍTULO 2

Árboles y algunas de sus aplicaciones

Fernando Hernández-Hernández y David Meza-Alcántara
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo[1]

1. Introducción

Sobre árboles hay una bella, útil y abundante teoría. En primer lugar podría parecer que los árboles son objetos puramente conjuntistas, puesto que en ellos se encuentran interesantes problemas sobre cardinalidades, tipos de orden, cofinalidades, cadenas y anticadenas, etc; que frecuentemente tienen soluciones en las que se usan métodos clásicos de la Teoría de Conjuntos, o que llegan a tener respuestas de consistencia relativa o independencia. Algunos teoremas clásicos de la Teoría de Conjuntos son precisamente sobre árboles. Este es el caso del Teorema de König (Teorema 2.1). Más allá de la Teoría de Conjuntos, los árboles también son útiles en el campo de la Topología General, en primer lugar, determinando subespacios de productos topológicos (ver sección 3), y también sirviendo en la construcción de ejemplos y contraejemplos, o siéndolo ellos mismos. Resulta sorprendente que dos conjuntos muy populares de números reales, el conjunto de Cantor y el conjunto de números irracionales (también conocido como *espacio de Baire*) puedan ser vistos a través de árboles, y que sus propiedades topológicas resulten más naturales al verlos de este modo que al pensarlos como subconjuntos de $\mathbb{R}$. Particularmente en términos de propiedades de árboles es posible caracterizar a los subespacios abiertos, cerrados, G_δ y magros de los espacios de Cantor y de Baire (ver la sección 4). La interacción entre topología y árboles permite hacer una útil traducción de problemas topológicos en problemas de combinatoria infinita, donde la teoría conocida sobre ordinales, conjuntos estacionarios, cardinales grandes, familias casi ajenas, familias no-acotadas y dominantes, etc; frecuentemente dispone de herramientas poderosas. Ejemplo de esto es la relación entre árboles y líneas de Souslin que se verá en la sección 5.

[1]La realización de este artículo fue patrocinada por PROMEP-CA9382, los proyectos UMSNH-CIC-9.23, UMSNH-CIC-9.30 y CONACYT-CB 169078.

CAPÍTULO 1

Árboles y algunas de sus aplicaciones

Fernando Hernández-Hernández y David Meza-Alcántara
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo[1]

1. Introducción

Sobre árboles hay una bella, útil y abundante teoría. En primer lugar podría parecer que los árboles son objetos puramente conjuntistas, puesto que en ellos se encuentran interesantes problemas sobre cardinalidades, tipos de orden, cofinalidades, cadenas y anticadenas, etc; que frecuentemente tienen soluciones en las que se usan métodos clásicos de la Teoría de Conjuntos, o que llegan a tener respuestas de consistencia relativa o independencia. Algunos teoremas clásicos de la Teoría de Conjuntos son precisamente sobre árboles. Este es el caso del Teorema de König (Teorema 2.1). Más allá de la Teoría de Conjuntos, los árboles también son útiles en el campo de la Topología General, en primer lugar, determinando subespacios de productos topológicos (ver sección 3), y también sirviendo en la construcción de ejemplos y contraejemplos, o siéndolo ellos mismos. Resulta sorprendente que dos conjuntos muy populares de números reales, el conjunto de Cantor y el conjunto de números irracionales (también conocido como *espacio de Baire*) puedan ser vistos a través de árboles, y que sus propiedades topológicas resulten más naturales al verlos de este modo que al pensarlos como subconjuntos de $\mathbb{R}$. Particularmente en términos de propiedades de árboles es posible caracterizar a los subespacios abiertos, cerrados, G_δ y magros de los espacios de Cantor y de Baire (ver la sección 4). La interacción entre topología y árboles permite hacer una útil traducción de problemas topológicos en problemas de combinatoria infinita, donde la teoría conocida sobre ordinales, conjuntos estacionarios, cardinales grandes, familias casi ajenas, familias no-acotadas y dominantes, etc; frecuentemente dispone de herramientas poderosas. Ejemplo de esto es la relación entre árboles y líneas de Souslin que se verá en la sección 5.

2. Generalidades.

El presente trabajo se enmarca en la Teoría de Conjuntos usual de Zermelo Fraenkel con Axioma de Elección. La lectura de este material será relativamente simple para quien haya tomado un curso de licenciatura de Teoría de Conjuntos (con un texto similar a [**H**]) y un primer curso de licenciatura de Topología (con un texto similar a [**M**]). Utilizaremos las nociones conjuntistas estándar y nos apegaremos a la notación del libro de Kunen [**Ku**]. Un ordinal es el conjuntos de los ordinales previos a él. Consideraremos a los números naturales como los ordinales finitos, ω denota al conjunto de todos los números naturales, el cual a su

[1]La realización de este artículo fue patrocinada por PROMEP-CA9382, los proyectos UMSNH-CIC-9.23, UMSNH-CIC-9.30 y CONACYT-CB 169078.

vez es el primer ordinal infinito, y consideramos a los cardinales como los ordinales no biyectables con ordinales previos. En particular ω_1 es el primer ordinal no-numerable. Denotaremos por $\mathrm{otp}(C)$ al tipo de orden de un conjunto bien ordenado C, es decir, el único ordinal al que C es isomorfo. Frecuentemente argumentaremos usando el Lema de Zorn, lo que de ahora en adelante llamaremos *zornificación*.

Muchos conceptos de la Topología General son abordados en este artículo. Todos ellos son estándar y la teoría general sobre estos puede consultarse en el libro de Engelking [**E**].

A continuación damos la definición de árbol, que es un tipo especial de conjunto ordenado que generaliza la noción de conjunto bien ordenado, y lo hace de una forma extensa pero también de modo muy conveniente que incluso las demostración por inducción y construcciones recursivas también serán posibles con cambios obvios.

Definición 2.1. *Un* árbol *es un conjunto parcialmente ordenado* $(T, \leq)$ *de modo que* T *tiene un elemento mínimo llamado* raíz *y el conjunto de predecesores de* t *en* T*,* $\{s \in T : s < t\}$, *está bien ordenado para cada* $t \in T$.

Hay alguna terminología estándar que es bueno incluir de inmediato. Como es toda una tradición, cuando el orden del árbol no esté en controversia nos referiremos al árbol simplemente por T y no por $(T, \leq)$. A los elementos de T se les llama *nodos*, el conjunto de predecesores de un nodo está explícitamente mencionado en la definición anterior; asimismo, si t es un nodo de T, el conjunto de *sucesores inmediatos* de t es $\mathrm{succ}(t) = \{s \in T : t \leq s \ \&\ \neg\,(\exists r \in T)\,(t < r < s)\}$. La *altura* de un nodo t en un árbol T es el tipo de orden del conjunto de predecesores; o sea, $\mathrm{ht}(t) = \mathrm{otp}(\{s \in T : s < t\})$. Una vez definida la altura de cada nodo es posible definir los *niveles* de T; si α es un ordinal, el α-ésimo nivel de T es

$$\mathrm{Lev}(\alpha, T) = \{t \in T : \mathrm{ht}(t) = \alpha\}.$$

Ahora, la *altura del árbol* es $\mathrm{ht}(T) = \min\{\alpha : \mathrm{Lev}(\alpha, T) = \emptyset\}$. Los nodos se clasifican como sucesores o límites según sea su altura; nótese que un nodo sucesor tiene un predecesor inmediato. Una *rama* en un árbol es un subconjunto linealmente ordenado $\subseteq$-maximal; o sea, que no está contenido propiamente un algún otro subconjunto linealmente ordenado. Una *rama cofinal* es aquella que intersecta a todos los niveles del árbol. Hay árboles que no tienen ramas cofinales; pronto daremos un ejemplo. Si $b \subseteq T$ es una rama de T; entonces b realmente es un subconjunto bien ordenado de T y por lo tanto puede calcularse su tipo de orden. El tipo orden de b, denotado por $\ell(b)$, es conocido como la *longitud de la rama* b. Finalmente un subárbol T' de T es un subconjunto de modo que él mismo es un árbol, para lo cual será suficiente con verificar que siempre que $t \in T'$ se tiene que $\{s \in T : s < t\} \subseteq T'$.

Si T' es un subárbol de T, entonces $\mathrm{Lev}(\alpha, T') = \mathrm{Lev}(\alpha, T) \cap T'$, para todo $\alpha < \mathrm{ht}(T')$. Para $\alpha < \mathrm{ht}(T)$, se tiene que $T^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Lev}\,(\beta, T)$ es un subárbol de T y si $x \in \mathrm{Lev}\,(\alpha, T)$, entonces $\{t \in T : t < x\}$ es una rama de $T^{(\alpha)}$. De modo similar, si $t \in T$; entonces $T^{\langle t\rangle} = \{s \in T : s \leq t \ \vee\ t < s\}$ es un subárbol de T y puede verse a t como el *tallo* de $T^{\langle t\rangle}$.

Como se dijo arriba, las ramas en un árbol son cadenas maximales; su contraparte, las anticadenas, también son subconjuntos importantes en el estudio de los árboles. Una *anticadena* es un suconjunto $A \subseteq T$ de modo que cualesquiera dos elementos de A no son comparables en el orden del árbol. Por ejemplo, los niveles de T son anticadenas, pero $Lev(\alpha, T)$ es una anticadena maximal sólo si todo nodo en T es comparable con un nodo en $Lev(\alpha, T)$. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 2.1. *Todo conjunto bien ordenado es un árbol.*

Ejemplo 2.2. *Para un ordinal λ y un conjunto no vacío A, el conjunto de todas las α-sucesiones $s : \alpha \to A$ de términos en A para $\alpha < \lambda$, denotado $A^{<\lambda}$, es un árbol con el orden de la extensión de funciones; es decir, el orden usual inducido por $\subseteq$. De especial interés para nosotros serán los árboles $\omega^{<\omega}$ y $2^{<\omega}$.*

Ejemplo 2.3. *Si $T \subseteq A^{<\lambda}$ es un subárbol, entonces las ramas de T pueden identificarse con aquellos $x \in A^{\lambda} \cup A^{<\lambda}$ tales que $x \restriction \alpha \in T$ para todo $\alpha \in \operatorname{dom}(x)$ y o bien $x \in T$ pero x no tiene sucesores en T o $x \notin T$.*

Ejemplo 2.4. *El conjunto $T \subseteq \omega^{<\omega}$ formado por todas las sucesiones decrecientes es un árbol de altura ω pero que no tiene ramas cofinales.*

Intuitivamente uno pensaría que los árboles infinitos deben tener ramas infinitas; el ejemplo anterior nos muestra que no es así. El problema, al menos en el árbol anterior, es que aunque “chaparrito es ancho". El lema siguiente nos revela que ese es el único problema.

Lema 2.1 (König). *Si T es un árbol de altura ω y todos sus niveles son finitos; entonces T tiene una rama infinita.*

Demostración: Hay que construir por recursión una rama infinita de T. Sea t_0 la raíz de T y supóngase que $n > 0$ y que se ha definido $t_i \in \operatorname{Lev}(i, T)$ para cada $i \leq n$ de modo que $t_i < t_{i+1}$ además de que $T^{\langle t_i \rangle}$ es infinito para cada $i \leq n$. Entonces como

$$T^{\langle t_n \rangle} = \bigcup \left\{ T^{\langle t \rangle} : t \in \operatorname{succ}(t_n) \right\}$$

es infinito y $\operatorname{succ}(t_n)$ es finito, por el Principio de las Casillas, debe existir $t_{n+1} \in \operatorname{succ}(t_n)$ tal que $T^{\langle t_{n+1} \rangle}$ también es infinito. Se verifica con facilidad que $\{t_n : n \in \omega\}$ es una rama infinita de T. $\square$

Es un hecho curioso que lo anterior no se pueda generalizar al siguiente cardinal; es decir, es posible demostrar que existen árboles T de altura ω_1 con todos sus niveles a lo más numerables; pero sin ramas cofinales. Esos árboles son conocidos como *árboles de Aronszajn* y más adelante presentaremos la construcción de uno de ellos.

3. Árboles y productos topológicos

En esta sección veremos algunas aplicaciones del concepto de árbol a productos topológicos de la forma A^{ω}, donde A es un conjunto no vacío equipado con la topología discreta. En esta sección asumiremos esto último. Este tipo de espacios son más populares de lo que uno se puede imaginar a primera vista.

Empecemos por recordar que un abierto básico usual para A^{ω} es de la forma

$$\{x \in A^{\omega} : (\forall i < n)\, (x\,(k_i) = a_i)\}\,,$$

donde evidentemente tanto $n \in \omega$ como $k_i \in \omega$ para cada $i < n$ y $a_i \in A$ para cada $i < n$. Sin embargo, aumentar restricciones a los básicos anteriores producirá conjuntos más apropiados para nosotros que también seguirán formando una base para la topología de A^{ω}. Pronto veremos el beneficio de tomar a estos conjuntos como la base estándar para la topología de A^{ω}. Con esto en mente, sea $s \in A^{<\omega}$; es decir, una sucesión finita $s : n \to A$ de términos en A; entonces el *cono* determinado por s es el abierto básico

$$[s] = \{x \in A^\omega : s = x \upharpoonright n\} ;$$

es decir, es el conjunto de todas las funciones de ω en A que inicialmente coinciden con s. Es fácil verificar que la colección de todos los conos en verdad nos proporciona una base para la topología de A^ω.

Por otro lado, si $T \subseteq A^{<\omega}$ es un árbol, denotaremos por $[T]$ al conjunto de ramas infinitas de T; es decir,

$$[T] = \{x \in A^\omega : (\forall n \in \omega)\,(x \upharpoonright n \in T)\} .$$

Obsérvese que si $s \in T$ entonces $\left[T^{\langle s\rangle}\right] = [s] \cap [T]$. Algo que usaremos mucho es la llamada concatenación de sucesiones. Si $s, t \in A^{<\omega}$, digamos que $s = \langle s_0, s_1, ..., s_k\rangle$ y $t = \langle t_0, t_1, ..., t_l\rangle$, se define la *concatenación* de s con t como la sucesión

$$s^\frown t = \langle s_0, s_1, ..., s_k, t_0, t_1, ..., t_l\rangle .$$

En particular, si $s \in A^{<\omega}$ y $a \in A$; entonces $s^\frown \langle a\rangle = s \cup \{\langle \mathrm{dom}(s), a\rangle\} = \langle s_0, s_1, ..., s_k, a\rangle$ que para mayor comodidad escribiremos simplemente como $s^\frown a$.

Definición 3.1. *Sea ϱ es un ordinal. Un árbol $T \subseteq A^{<\varrho}$ se llama* podado *si cualquier nodo de T tiene al menos un sucesor.*

Veamos nuestro primer resultado sobre la relación existente entre subárboles de $A^{<\omega}$ y la topología de A^ω. Este es quizás el teorema más importante de la sección.

Teorema 3.1. *Hay una correspondencia biyectiva entre la familia de subárboles bien podados de $A^{<\omega}$ y la familia de subconjuntos cerrados de A^ω; esta correspondencia está dada por $T \longmapsto [T]$.*

Demostración: Si $T \subseteq A^{<\omega}$ está podado, entonces $[T]$ es un cerrado de A^ω porque si $x \notin [T]$ entonces existe $n \in \omega$ tal que $s = x \upharpoonright n \notin T$ y consecuentemente $[s] \cap [T] = \emptyset$. Además, si $F \subseteq A^\omega$ es un cerrado, entonces $T_F = \{x \upharpoonright n : x \in F \,\&\, n \in \omega\}$ es claramente un árbol podado y $F = [T_F]$ con lo que se puede concluir que la función $F \longmapsto T_F$ es la inversa de la función que aparece en el enunciado del teorema. □

Los cerrados en A^ω no sólo están determinados por árboles sino que eso mismo nos ayuda a demostrar que cuando la condición obvia se tiene entre dos subconjuntos cerrados se obtiene que uno es retracto del otro. Recuerde que si X es un espacio topológico y $Y \subseteq X$, entonces se dice que Y es un *retracto* de X si existe una función continua $f : X \to Y$ tal que $f \upharpoonright Y = id_Y$. Es un resultado conocido que en espacios de Hausdorff los retractos del espacio son necesariamente cerrados.

Teorema 3.2. *Sean $F \subseteq H \subset A^\omega$ cerrados no vacíos. Entonces F es un retracto de H.*

Demostración: Sean S y T árboles podados tales que $F = [S]$ y $H = [T]$. Definiremos recursivamente una función $g : T \to S$ por $g(\emptyset) = \emptyset$ y para cualesquiera $a \in A$ y $t \in A^{<\omega}$,

$$g(t^\frown a) = \begin{cases} g(t)^\frown a, & \text{si } g(t)^\frown a \in S \\ g(t)^\frown b, & \text{si no y } g(t)^\frown b \in S. \end{cases}$$

El b de la definición de g se escoge de manera arbitraria para que se cumpla la condición; tal $b \in A$ existe porque el árbol S es bien podado. Entonces defínase

$G : H \to F$ como sigue: Para $h \in H$, $G(h)$ es el único $x \in A^\omega$ tal que $(\forall n \in \omega)(x \restriction n = g(h \restriction n)$ Esta función está bien definida puesto que para cada $n \in \omega$ se tiene que $g(h \restriction n) \in S$.

Para establecer la continuidad de G, sean $h \in H$ y $m \in \omega$ para tener un abierto básico $[s] = \langle G(h) \restriction m \rangle$ arbitrario alrededor de $G(h)$. Como $G(h) \restriction m = g(h \restriction m)$, se sigue que $G[\langle h \restriction m \rangle] \subseteq [s]$; lo cual establece la continuidad de G. $\square$

Otros de los conjuntos topológicamente importantes en A^ω que tienen una descripción sencilla por medio de árboles son los conjuntos de tipo G_δ.

Dado un subconjunto (típicamente infinito) R de un árbol T, se define la *traza* de R como el conjunto

$$tr(R) = \{x \in [T] : \forall m \exists n \geq m \, (x \restriction n \in R)\}.$$

Proposición 3.1. *Para cada $R \subseteq T$, $tr(R)$ un conjunto de tipo G_δ.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\emptyset \in R$, pues en otro caso, podemos agregarlo a R sin cambiar su traza. Por recursión, constrúyase una sucesión $\langle A_n : n \in \omega \rangle$, de anticadenas en T contenidas en R y tales que $A_0 = \{\emptyset\}$ y para cada n, A_{n+1} es maximal con respecto a las propiedades:

- $A_{n+1} \subseteq R$, y
- para cada $t \in A_{n+1}$ existe $s \in A_n$ tal que $s \subseteq t$.

Es fácil probar por zornificación que tales anticadenas existen, además, por inducción sobre n se puede probar que cada nodo en A_n tiene longitud mayor o igual que n. Defínase $U_n = \bigcup\{[t] : t \in A_n\}$. Claramente cada U_n es abierto y contiene a $tr(R)$. Por otro lado, si $x \in \bigcap_n U_n$ entonces para cada n existe $k \geq n$ tal que $x \restriction k \in A_n \subseteq R$, por lo que $x \in tr(R)$. $\square$

Por otro lado, dado un subconjunto G_δ de $[T]$, existen muchas maneras de verlo como traza de algún subconjunto infinito de T. Dada una familia decreciente $\{U_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos abiertos de $[T]$, podemos considerar para cada n a la familia A_n de los elementos s de T maximales con respecto a la propiedad de que $[s] \subseteq U_n$. Nótese que $U_n = \bigcup\{[s] : s \in A_n\}$. De este modo, $\bigcap_n U_n = tr(\bigcup_n A_n)$. Conviene remarcar que este procedimiento no es uno *canónico*, en el sentido de que depende de la representación del conjunto G_δ como intersección de abiertos.

4. El conjunto de Cantor y los irracionales

Muchos de nosotros tuvimos un primer encuentro con el conjunto (ternario) de Cantor en la primera mitad de la licenciatura en matemáticas y desde entonces hemos sabido de su importancia. Recordemos que el conjunto de Cantor puede construirse a partir del intervalo cerrado $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$, luego removiendo el intervalo llamado "tercio de enmedio", $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, luego removiendo los dos tercios de enmedio, los intervalos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$; y así sucesivamente. El conjunto de Cantor es la intersección de todos los cerrados resultantes. La definición precisa del conjunto de Cantor puede hallarse en cualqueir libro de análisis matemático, como el de Rudin [**R**].

Para nuestros fines, conviene más trabajar con un objeto combinatorio pero equivalente al antes descrito conjunto de Cantor. Conviene recordar algunos resultados típicos en un primer curso de topología como el Teorema de Metrización de Urysohn que establece que un espacio regular y segundo numerable es metrizable, el resultado que establece que el producto numerable de espacios metrizables es metrizable y que si además los espacios factores son completamente metrizables el espacio producto también es completamente metrizable. Aquí el término *completamente metrizable* significa que existe una métrica completa que induce la topología del espacio considerado. Otros de los resultados que nos serán de utilidad son aquellos que establecen que el producto numerable de espacios segundo numerables es un espacio segundo numerable y que en espacios metrizables los conceptos de segundo numerable, Lindelöf, separable, c.c.c.[2] coinciden. Obviamente, uno más de los resultados fundamentales de un primer curso de topología es el Teorema de Tychonoff que establece que el producto de espacios compactos es un espacio compacto.

DEFINICIÓN 4.1. *Un espacio topológico X es* cero dimensional *si la topología de X tiene una base de conjuntos* clopen *(o sea, conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez).*

Usando resultados antes comentados se obtienen propiedades características de 2^ω, el producto numerable del espacio discreto $\{0,1\}$; a saber, que es un espacio compacto, separable, cero dimensional y sin puntos aislados. Veamos un primer resultado que establece la importancia de 2^ω.

TEOREMA 4.1. *Cualquier espacio compacto y metrizable es una imagen continua de 2^ω.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un espacio métrico compacto y, sin pérdida de generalidad, supongamos que d es una métrica acotada por 1 y que induce la topología de X.

Empecemos por considerar una cubierta $\mathcal{U}_0 = \{U_i : i \leq n_0\}$ de X formada por conjuntos abiertos con cerradura de diámetro a lo más $1/2$; asociemos esta cubierta de X con una cubierta de 2^ω formada por abiertos básicos como sigue: U_0 corresponde al abierto básico $[\langle 0\rangle]$, U_1 corresponde al abierto básico $[\langle 1,0\rangle]$, U_2 corresponde a $[\langle 1,1,0\rangle]$ y en general U_i corresponde a $[\langle 1^{\overline{i}},0\rangle]$ para $i < n_0$ y U_{n_0} corresponde a $[\langle 1^{\overline{n-1}},1\rangle]$; donde $\langle 1^{\overline{j}},l\rangle$ denota la sucesión que empieza con j "bits" 1 y termina con el "bit" l. Pongamos $s_{\langle i\rangle} = [\langle 1^{\overline{i}},0\rangle]$ para $i < n_0$ y $s_{\langle n\rangle} = [\langle 1^{\overline{n-1}},1\rangle]$; además de $A_0 = \left\{s_{\langle 0\rangle},...,s_{\langle n\rangle}\right\}$.

Ahora consideremos una cubierta $\mathcal{U}_1 = \left\{U_{\langle i,j\rangle} : j \leq n_1\right\}$ de $\overline{U_i}$ formada por conjuntos abiertos con cerradura de diámetro a lo más $1/4$ y asociemos esta cubierta con una cubierta de $[s_{\langle i\rangle}]$ repitiendo el procedimiento del párrafo anterior: $U_{\langle i,0\rangle}$ corresponde a $[s_{\langle i\rangle} \frown \langle 0\rangle]$, $U_{\langle i,1\rangle}$ corresponde a $[s_{\langle i\rangle}^\frown \langle 1,0\rangle]$ y en general $U_{\langle i,j\rangle}$ corresponderá con $[s_{\langle i\rangle}^\frown \langle 1^{\overline{j}},l\rangle]$; donde l es 0 si $j < n_1$ y l es 1 si $j = n_1$. También denotemos por $s_{\langle i,j\rangle}$ al respectivo $s_{\langle i\rangle}^\frown \langle 1^{\overline{j}},l\rangle$ (según lo antes indicado) y $A_1 = \left\{s_{\langle i,j\rangle} : i \leq n_0,\ j \leq n_1\right\}$.

Obviamente este procedimiento es perfectamente continuable con una cubierta $\mathcal{U}_3$ de $\overline{U}_{\langle i,j\rangle}$ ahora formada por abiertos con cerradura de diámetro a lo más $1/8$ que corresponden a abiertos básicos determinados por un conjunto finito $A_2 \subseteq 2^{<\omega}$; y así sucesivamente. Observe que como cada A_i es una anticadena maximal finita en el árbol $2^{<\omega}$, entonces para cada $x \in 2^\omega$ existe un único elemento $s_i^x \in A_i$ de

[2]Un espacio topológico es c.c.c. si cualquier familia de subconjuntos abiertos no vacíos y ajenos por pares es a lo más numerable. Tales espacios también se les conoce como espacios topológicos con la propiedad de Souslin.

modo que $s_i^x \subseteq x$ y que este único elemento de A_i determina un único elemento U_i^x de $\mathcal{U}_i$.

Definamos ahora $f : 2^\omega \to X$ por $f(x)$ será el único punto de la intersección

$$\bigcap \left\{ \overline{U_i^x} : i \in \omega \right\}.$$

Esta intersección no es vacía porque X es compacto y consta de un solo punto porque el diámetro de los conjuntos $\overline{U_i^x}$ tiende a cero conforme i tiende a infinito; así esta función está bien definida. Ahora, si $x \in 2^\omega$ y V es una vecindad de $f(x)$, entonces existen $i \in \omega$ y $U \in \mathcal{U}_i$ tales que $f(x) \in U \subseteq V$. A este U corresponde un único $s \in A_i$ y de la definición de f se sigue que $f[[s]] \subseteq U$; esto establece la continuidad de f.

Finalmente para ver que f es sobreyectiva, sea $y \in X$ y para cada $i \in \omega$ escoja $U_i^y \in \mathcal{U}_i$ tal que $y \in U_i^y$. Como ya sabemos, hay un único $s_i^y \in A_i$ que corresponde a U_i^y. Póngase $x = \bigcup_{i \in \omega} s_i^y$ para tener que $f(x) = y$. $\square$

Recuerde que un subconjunto P de un espacio topológico X se llama *perfecto* si P es cerrado y todos sus puntos son puntos de acumulación; también a un espacio X se le llama *perfecto* si X no tiene puntos aislados; en otras palabras, todo punto de X es punto de acumulación. El siguiente resultado es prácticamente un corolario del anterior.

TEOREMA 4.2. *El espacio 2^ω es el único (salvo homeomorfismo) espacio metrizable el cual es compacto, separable, cero dimensional y sin puntos aislados.* $\square$

Se dijo que es prácticamente un corolario porque si analizamos la demostración del Teorema 4.1 podemos observar que cada cubierta $\mathcal{U}_i$ la podemos hacer ahora de conjuntos clopen ajenos por pares. Eso garantizará además de la continuidad de la función f también su inyectividad. Como los espacios en cuestión son compactos, el resultado se sigue de un bien conocido resultado de topología elemental. Casi del mismo modo se obtiene el siguiente teorema cuya demostración se deja como ejercicio para el lector.

TEOREMA 4.3. *Todo espacio métrico completo y perfecto contiene un subconjunto homeomorfo al conjunto de Cantor.* $\square$

De los resultados anteriores se sigue que el conjunto clásico (ternario) de Cantor es homeomorfo a 2^ω. Para nosotros será preferible trabajar con 2^ω y por ello cuando se hable del conjunto de Cantor entenderemos que se está hablando de este espacio.

Veamos una aplicación más del concepto de árbol a la topología del conjunto de Cantor, que consiste en caracterizar combinatoriamente a sus subconjuntos magros. Primero recuerde que un subconjunto N de un espacio topológico X se llama *nunca denso* (o denso en ninguna parte) si cada subconjunto abierto $U \subseteq X$ contiene otro subconjunto abierto V tal que $N \cap V = \emptyset$. Un conjunto que es la unión numerable de conjuntos nunca densos se llama *magro*.

PROPOSICIÓN 4.1. *Sea $A \subseteq 2^\omega$. Entonces, A es magro si y sólo si existen $f \in \omega^\omega$ creciente y $g \in 2^\omega$ tales que*

$$A \subseteq \{x \in \omega^\omega : (\exists m \in \omega)(\forall n \geq m)(\exists j \in [f(n), f(n+1)))(x(j) \neq g(j))\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Probemos la suficiencia. Nótese primero que A está contenido en $\bigcup_{m \in \omega} A_{m,f,g}$, donde

$$A_{m,f,g} = \{x \in 2^\omega : (\forall n \geq m)(\exists j \in [f(n), f(n+1)))(x(j) \neq g(j))\},$$

el cual es nunca denso pues dada $s \in \omega^{<\omega}$, tomando $k \geq m$ tal que $f(k) \geq \ell(s)$ y eligiendo $t \in \omega^{f(k)}$ de modo que $t \supseteq s$, tenemos que

$$[t^\frown g(f(k))^\frown g(f(k)+1)^\frown \ldots ^\frown g(f(k+1)-1)] \cap A_{m,f,g} = \emptyset.$$

Ahora bien para probar la necesidad, sea $\{F_n : n \in \omega\}$ una familia numerable de conjuntos cerrados nunca densos tales que $A \subseteq \bigcup_n F_n$, sin perder generalidad podemos suponer que $F_n \subseteq F_{n+1}$ para toda $n \in \omega$.

Definiremos recursivamente las funciones f y g prometidas, junto con dos sucesiones auxiliares r_n y S^n que satisfacen:

(1) $f(0) = 1$, $g(0) = 0$
(2) r_n es una enumeración del árbol $2^{f(n)}$.
(3) S^n es una sucesión creciente de sucesiones finitas, $S^n_0 \subseteq S^n_1 \cdots \subseteq S^n_{2^{f(n)}-1}$ tales que:
  (a) $S^n_0 \supseteq g \restriction f(n)$,
  (b) Para todo $j < 2^{f(n)}$, tómese S^n_j de modo tal que
    (i) Si $j = 0$ entonces

$$\langle r_n(0)^\frown S^n_0(f(n))^\frown S^n_0(f(n)+1)^\frown \ldots ^\frown S^n_0(\ell(S^n_0)-1)\rangle \cap F_n = \emptyset.$$

    (ii) Si $j > 0$ entonces

$$\langle r_n(j)^\frown S^n_j(\ell(S^n_{j-1}))^\frown S^n_j(\ell(S^n_{j-1})+1)^\frown \ldots ^\frown S^n_j(\ell(S^n_j)-1)\rangle \cap F_n = \emptyset.$$

(4) $f(n+1) = \ell(S^n_{2^{f(n)}-1}) + 1$, y
(5) $g \restriction f(n+1) = S^n_{2^{f(n)}-1}$.

En otras palabras, recursivamente se construyen las funciones f, g, S^n y r^n de modo tal que en el paso n, cada sucesión de longitud menor o igual a $f(n)$ sea extendida por una sucesión r^n_j, la cual a su vez será extendida por un tramo de S^n_j cuyo cono será ajeno a F_n (tal sucesión existe pues F_n es nunca denso) y que por construcción coincidirá en algún tramo final con g, la cual está definida como la unión de las S^n.

De este modo, dada $x \in 2^\omega$, si para algún m, $x \in F_m$ entonces para todo $n \geq m$ es el caso que $x \restriction [f(n), f(n+1)) \neq g \restriction [f(n), f(n+1))$ pues de lo contrario, $x \notin F_n$. $\square$

Otro de los espacios muy familiares a todos nosotros es el espacio de los números irracionales que también es homeomorfo a un producto topológico y que herramientas por medio del concepto de árbol son muy útiles para establecer alguas propiedades de dicho espacio. Veamos una pequeña muestra de ello. Un espacio topológico X se llama *polaco* si es separable y completamente metrizable. Al producto topológico ω^ω se le conoce como *espacio de Baire.*

Teorema 4.4. *El espacio de Baire, ω^ω, es el único (salvo homeomorfismo) espacio que es polaco, cero dimensional, perfecto y en el cual todo subconjunto compacto es nunca denso en X.*

Un corolario inmediato de este teorema es que ω^ω es homeomorfo al conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, con la topología heredada por $\mathbb{R}$. Antes de establecer el teorema necesitaremos del siguiente lema.

Lema 4.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si existe una familia $\{U_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ de conjuntos abiertos no vacíos tales que:*

(1) $s \subseteq t \Rightarrow U_t \subseteq U_s$,

(2) $m \neq n \Rightarrow U_{s^\frown m} \cap U_{s^\frown n} = \emptyset$,
(3) $(\forall s \in \omega^{<\omega})\,(\forall n \in \omega)\,\left(\overline{U_{s^\frown n}} \subseteq U_s\right)$,
(4) $(\forall f \in \omega^\omega)\,(\lim_{n\to\infty} diam\,(U_{f\restriction n}) = 0)$;

entonces existe un encaje topológico $f : \omega^\omega \hookrightarrow X$.

Demostración: [Demostración del Lema]Es claro que la función f buscada está dada como sigue: para cada $z \in \omega^\omega$, sea $f(z)$ el único elemento de X que está en $\bigcap_n U_{z\restriction n}$. Tal intersección es no vacía por la condición (3), y tiene un solo elemento por (4). Por (2), f es inyectiva. Dados $\varepsilon > 0$ y $z \in \omega^{<\omega}$, por (4) podemos tomar n suficientemente grande de modo que $diam(U_{z\restriction n}) < \varepsilon$ y así $f([z \restriction n]) \subseteq U_{z\restriction n} \subseteq B_\varepsilon(f(z))$, lo que prueba que f es continua. Finalmente, observe que para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $f([s]) = U_s \cap img(f)$ lo cual prueba que f es abierta sobre su imagen. □

Demostración: [Demostración del Teorema 4.4]Supongamos que X satisface las hipótesis, y veamos que existe una familia $\{U_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ como en el Lema 4.1, pero que además satisface que para toda $s \in \omega^{<\omega}$,

(5) U_s es cerrado, y
(6) $U_s = \bigcup\{U_{s^\frown j} : j \in \omega\}$.

Antes de entrar en la construcción de tal familia, observemos algo importante. Como X es polaco, por el Teorema de la Categoría de Baire, ninguno de sus subconjuntos abiertos no vacíos es magro, en particular no son nunca densos, y así por hipótesis, ningún subconjunto abierto de X es compacto, por lo que para cada abierto U de X existirá una cubierta abierta sin subcubiertas finitas. Pero tal cubierta también puede ser encontrada de modo que sus elementos estén en alguna base conveniente. Para cada n, fijemos $\mathcal{B}_n$ una base numerable de la topología de X formada por conjuntos clopen con diámetro menor que $\frac{1}{n}$.

Ahora sí, empecemos la construcción. Sea $U_0 = X$, supongamos que hemos definido a U_s ($s \in \omega^n$) de modo que satisfaga las condiciones (1)-(6) y definamos $U_{s^\frown j}$ para toda $j \in \omega$. Sea $\{V_j : j \in \omega\}$ una cubierta de U_s formada por elementos de $\mathcal{B}_n$ (por lo cual es necesariamente numerable) la cual no tiene subcubiertas finitas, y sin pérdidad de generalidad supongamos que $V_j \setminus \bigcup_{i<j} V_i \neq \emptyset$ (si no fuera el caso, podemos eliminar algunas V_j y reenumerar). Definamos entonces $U_{s^\frown j} = V_j \setminus \bigcup_{i<j} V_i$. Note que los conjuntos $U_{s^\frown j}$ son clopen, tienen diámetro menor que $\frac{1}{n}$, son mutuamente ajenos, y $U_s = \bigcup_j U_{s^\frown j}$. De este modo la familia de los $\{U_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ satisface (1)-(6). Por satisfacer (1)-(4), la función inducida es un encaje topológico, además, por inducción es muy fácil ver que para cada $n \in \omega$, la familia $\{U_s : s \in \omega^n\}$ es una partición de X, por lo cual, si $x \in X$ entonces para $z = \bigcup_n \{s_n \in \omega^n : x \in U_{s_n}\}$, sucede que $f(z) = x$, mostrando que f es suprayectiva. □

Al igual que en el caso de los conjuntos magros de 2^ω, es posible caracterizar combinatoriamente a los conjuntos magros de ω^ω como se muestra en el siguiente resultado.

Proposición 4.2. *Sea $A \subseteq \omega^\omega$. Entonces, A es magro si y sólo si existen $f \in \omega^\omega$ creciente y $g \in \omega^\omega$ tales que*

$$A \subseteq \{x \in \omega^\omega : (\forall^\infty n)(\exists j \in [f(n), f(n+1)))(x(j) \neq g(j))\}.$$

Demostración: Basta hacer dos simples modificaciones a la prueba de la Proposición 4.1 que consisten en (1) para probar que $A_{m,f,g}$ es nunca denso, se debe considerar $k \geq \max\{\ell(s)\} \cup \{s(j) : j < \ell(s)\}$ para que así s tenga una extensión en el árbol $k^{f(k)}$ y (2) considerar en el paso n, a r^n como una enumeración del árbol $n^{f(n)}$. □

5. Árboles de Aronszajn y Souslin

Empecemos por recordar el Lema de König que nos asegura la existencia de una rama de longitud ω en un árbol de altura ω pero con niveles finitos. Hay algunas maneras claras de generalizar el resultado de König; veamos por ejemplo una, que el lector menos familiarizado con conjuntos estacionarios bien puede omitir sin perder la esencia del material.

Teorema 5.1 (Kurepa). *Sea κ un cardinal regular y sea T un árbol de altura κ tal que para algún $\lambda < \kappa$ se tiene que $|\mathrm{Lev}\,(\alpha, T)| < \lambda$ para todo $\alpha < \kappa$. Entonces T tiene una rama cofinal.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que λ es también un cardinal regular; observe que así obtenemos que $S^\kappa_\lambda = \{\gamma < \kappa : \mathrm{cf}\,(\gamma) = \lambda\}$ es un conjunto estacionario en κ. Para cada $\delta \in S^\kappa_\lambda$, elíjase arbitrariamente un $t_\delta \in \mathrm{Lev}\,(\delta, T)$. Ahora para cada $\delta \in S^\kappa_\lambda$, escójase $s_\delta \in T$ con $s_\delta < t_\delta$ y tal que

$$\{s \in T : s_\delta \leq s\} \cap \mathrm{Lev}\,(\delta, T) = \{t_\delta\}\,.$$

Esto es posible porque t_δ tiene al menos λ antecesores y de no ser posible se debería tener que $|\mathrm{Lev}\,(\alpha, T)| \geq \lambda$, lo cual es una contradicción.

Usando el Lema de Fodor[3], es posible hallar un subconjunto estacionario $A \subseteq S^\kappa_\lambda$ y $\gamma < \kappa$ tal que $\mathrm{ht}\,(s_\delta) = \gamma$ para $\delta \in A$. Ya que $|\mathrm{Lev}\,(\gamma, T)| < \lambda < \kappa$, podemos suponer que para algún $r \in \mathrm{Lev}\,(\gamma, T)$ se tiene que $r = s_\delta$ para $\delta \in A$.

Veamos ahora que $\{t_\delta : \delta \in A\}$ es una cadena en T; esto completará la demostración. En efecto, si para $\delta, \delta' \in A$, distintos, digamos $\delta < \delta'$, tuvieramos que t_δ y $t_{\delta'}$ no son compatibles entonces $\{s \in T : s_\delta \leq s\} \cap \mathrm{Lev}\,(\delta, T)$ debería tener al menos dos elementos, contradiciendo la elección de s_δ. □

Como antes dijimos, la generalización directa del Lema de König para ω_1 en lugar de ω no es cierta. Así se tiene el siguiente tipo de árboles.

Definición 5.1. *Un* árbol de Aronszajn *es un árbol T que tiene niveles a lo más numerables y no tiene una rama cofinal.*

La definición anterior se ha hecho en un lenguaje, digamos “frondoso"; pero lo que realmente dice es que un árbol de Aronszajn es no numerable pero no tiene ni niveles ni ramas no numerables. Este concepto se ha convertido en uno fundamental en Teoría de Conjuntos. La existencia de uno de estos árboles fue primero establecida no por un conjuntista sino por un analista, Nachman Aronszajn en 1934. También se puede generalizar el concepto para cardinales mayores que $\aleph_1$ con el requerimiento obvio, estos suelen llamarse árboles κ-Aronszajn. La existencia de un árbol $\aleph_2$-Aronszajn ya no es una cuestion decidible dentro de ZFC. Para cardinales singulares κ sí es posible establecer su existencia pero hay algunos cardinales grandes κ, los llamados débilmente compactos, que tienen la propiedad de

[3]También conocido como *Pressing Down Lemma*, ver [**Ku**, p. 80].

que no existen árboles κ-Aronszajn y recíprocamente si un cardinal κ es inaccesible y no hay un árbol κ-Aronszajn, entonces κ es débilmente inaccesible. Veamos la existencia de un árbol de Aronszajn.

TEOREMA 5.2. *Los árboles de Aronszajn existen en ZFC.*

DEMOSTRACIÓN: Se construirán los niveles $T_\alpha = \mathrm{Lev}\,(\alpha, T)$, para $\alpha < \omega_1$, de un árbol de Aronszajn T por recursión de modo tal que

(1) $T_\alpha \subseteq \omega^\alpha$; $|T_\alpha| \leq \aleph_0$;
(2) Si $f \in T_\alpha$, entonces f es inyectiva y $\omega \setminus \mathrm{ran}(f)$ es infinito;
(3) Si $f \in T_\alpha$ y $\beta < \alpha$, entonces $f \restriction \beta \in T_\beta$;
(4) Para cualquier $\beta < \alpha$,cualquier $g \in T_\beta$ y cualquier conjunto finito $X \subseteq \omega \setminus \mathrm{ran}\,(g)$, existe $f \in T_\alpha$ tal que $f \supseteq g$ y $\mathrm{ran}\,(f) \cap X = \emptyset$.

Primero supongamos que tal construcción puede hacerse y mostraremos que $T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha$ es un árbol de Aronszajn. Claramente T es un árbol por la tercera clausula y cada nivel es a lo más numerable además de que tiene altura ω_1 pues por la cuarta clausula, cada $T_\alpha \neq \emptyset$. Si T tuviera una rama B de longitud ω_1, entonces $f = \bigcup B$ sería una función inyectiva de ω_1 en ω, que sería una contradicción.

Bien veamos la construcción de los T_α's. Como es costumbre, empecemos haciendo $T_0 = \{\emptyset\}$. Suponiendo que T_α se ha construido satisfaciendo las cuatro clausulas, hacemos

$$T_{\alpha+1} = \{g \cup \{\langle \alpha, a\rangle\} : g \in T_\alpha \;\&\; a \in \omega \setminus \mathrm{ran}\,(g)\}\,.$$

No es difícil ver que con esta definición se preservan las propiedades recursivas para $\alpha + 1$.

Para α límite hacemos lo siguiente. Primero para $\beta < \alpha$ y $g \in T_\beta$ además de un conjunto finito $X \subseteq \omega \setminus \mathrm{ran}(g)$ constrúyase por recursión una f, que dependa obviamente de g y X, como sigue. Primero fije una sucesión creciente $\langle \alpha_n : n \in \omega\rangle$ tal que $\alpha_0 = \beta$ y $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Sea $f_0 = g \in T_{\alpha_0}$ y $X_0 = X \subseteq \omega \setminus \mathrm{ran}\,(f_0)$. Habiendo definido $f_n \in T_{\alpha_n}$ y un conjunto finito $X_n \subseteq \omega \setminus \mathrm{ran}\,(f_n)$, tomamos un conjunto finito $X_{n+1} \supseteq X_n$ y $X_{n+1} \subseteq \omega \setminus \mathrm{ran}\,(f_n)$. Esto es posible porque por la segunda clausula $\omega \setminus \mathrm{ran}\,(f_n)$ es infinito. Entonces seleccione una $f_{n+1} \in T_{\alpha_{n+1}}$ tal que $f_{n+1} \supseteq f_n$ y $X_{n+1} \cap \mathrm{ran}\,(f_{n+1}) = \emptyset$, lo cual es posible por la cuarta clausula. Entonces hacemos $f = \bigcup_{n\in\omega} f_n$ para tener que claramente $f : \alpha \to \omega$ y es inyectiva además de que $\mathrm{ran}\,(f) \cap \bigcup_{n\in\omega} X_n = \emptyset$ y por lo tanto $\omega \setminus \mathrm{ran}\,(f)$ es infinito y $\mathrm{ran}\,(f) \cap X = \emptyset$.Así f satisface la segunda clausula. Además, para $\beta < \alpha$ se tiene que $f \restriction \beta = f_n \restriction \beta$ cuando $\beta < \alpha_n$ y con esto la tercera clausula se satisface también.

Hacemos que $f \in T_\alpha$ para cada $g \in \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$ y cada finito $X \subseteq \omega \setminus \mathrm{ran}\,(g)$; esto hará que la cuarta clausula se satisfaga. Como $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{T}_\beta$ es numerable y la cantidad de subconjuntos finitos de ω es también numerable, se sigue que T_α es a lo más numerable, y la primera clausula también es satisfecha. □

Otra manera popular de construir un árbol de Aronszajn es considerar primero el árbol

$$T_0 = \{s \subseteq \mathbb{Q} : \mathrm{s} \text{ es bien ordenado y tiene máximo}\}$$

ordenado por extensión final; es decir, $s \leq_{T_0} t$ si y sólo si s es un segmento inicial de t. Este es un árbol de altura ω_1 que es la unión de una cantidad numerable de anticadenas; de hecho la función que a cada elemento de T_0 le asigna su máximo es una función creciente de T_0 en $\mathbb{Q}$. Esto último da pie a definir que un árbol T

es $\mathbb{Q}$-encajable si existe una función creciente $f : T \to \mathbb{Q}$; la función no necesita ser inyectiva. También se dice que un árbol T es *especial* si es la unión de una familia numerable de anticadenas. Puede demostrarse que un árbol T es especial si y sólo si T es $\mathbb{Q}$-encajable. La pregunta de si todo árbol de Aronszajn es especial es interesante y se sabe que no puede decidirse en ZFC.

Pasemos ahora a definir otro tipo de árboles con propiedades mucho más fuertes. El interés en este tipo de árboles data de alrededor de 1920 cuando M. Y. Souslin planteó su famoso problema sobre órdenes lineales. Cantor algunos años antes había demostrado que $\mathbb{R}$ se caracteriza por ser un orden completo, sin extremos, denso en sí mismo y separable (o sea, con un subconjunto denso numerable). A Souslin se le ocurrió cambiar esa última condición por aquella de que cualquier familia de intervalos abiertos, no vacíos y ajenos por pares sea a lo más numerable y preguntar si este cambio no afectaba dicha caracterización de los reales. A los conjuntos linealmente ordenados que son densos en sí mismos y que cumplen la condición de que la máxima cantidad de intervalos abiertos y ajenos por pares es $\aleph_0$; pero que no son separables se les conoce como *líneas de Souslin.* Ahora se sabe que es independiente de ZFC la existencia de líneas de Souslin. En 1935 D. Kurepa hizo notar la relación que existe entre el problema de Souslin y el tipo de árboles que a continuación definiremos. A él también se debe nuestro próximo teorema.

Definición 5.2. *Un árbol T se llama* árbol de Souslin *si T no tiene ni cadenas, ni anticadenas no numerables; pero T tiene altura ω_1.*

De la definición se sigue sin dificultad que todo árbol de Souslin es en particular un árbol de Aronszajn. La contribución de Kurepa fue muy importante porque transformó el problema de Souslin en un problema mucho más combinatorio. Conjeturamos que este cambio de enfoque en el problema de Souslin fue lo que ayudó a R. B. Jensen para que alrededor de 1968 usara un principio combinatorio que es consecuencia del Axioma de Constructibilidad de K. Gödel para definir a partir de ese un árbol de Souslin. Así fue establecido que la existencia de árboles de Souslin es relativamente consistente con ZFC. Pero, quedaba aún abierta la posibilidad de que los árboles de Souslin en verdad existieran en ZFC y no dependieran de axiomas adicionales. Esto último fue resuelto negativamente en una publicación de 1971 hecha por R. M. Solovay y S. Tennenbaum en el que se estableció un modelo para una fracción importante de ZFC en el que no existen árboles de Souslin. Pero, pasemos mejor a establecer el resultado de D. Kurepa en el que se muestra la relación que comentábamos antes.

Definición 5.3. *Diremos que un árbol es* bien podado *si cada nodo tiene una cantidad no numerable de sucesores.*

Nótese que cualquier árbol de Souslin se puede podar bien, en el sentido de que por niveles se le pueden recortar los nodos que tengan pocos sucesores, y así conseguir un subárbol que también es de Souslin, y además bien podado.

Teorema 5.3. *Existe un árbol de Sousin bien podado si y sólo si existe una línea de Souslin.*

Demostración: Supongamos primero que hay un árbol de Souslin T y mostremos que también hay una línea de Souslin. Para esto consideremos a $[T]$, el conjunto de todas las ramas de T.[4] Obsérvese que si $b \in [T]$ entonces $\ell(b) < \omega_1$ además de que b no tiene elemento máximo puesto que nuestro árbol T es podado; por lo tanto se debe tener que $\ell(b)$ es un ordinal límite. Para cada $\alpha < \ell(b)$, denotemos por $b(\alpha)$ al único elemento de la intersección $b \cap \mathrm{Lev}(\alpha, T)$.

Vamos a definir un orden lineal sobre $[T]$ y para ello fijemos un orden lineal cualquiera $\preceq$ sobre T. Ahora, si $b, c \in [T]$ son diferentes, denotemos por $\beta(b, c)$ al mínimo $\alpha < \omega_1$ de modo que $b(\alpha) \neq c(\alpha)$. Nótese que siempre se tiene que $\beta(b, c) < \min\{\ell(b), \ell(c)\}$. Entónces defínase

$$b \trianglelefteq c \text{ si y sólo si } b(\beta(b, c)) \preceq c(\beta(b, c)).$$

No es difícil verificar que $\trianglelefteq$ es un orden lineal sobre $[T]$; hay que demostrar que $([T], \trianglelefteq)$ es en verdad una línea de Souslin.

Primero veamos que $([T], \trianglelefteq)$ no es separable. En efecto, si $\{b_n : n \in \omega\}$ es cualquier subconjunto numerable de $[T]$ entonces podemos hallar $\xi < \omega_1$ de modo que para todo $n \in \omega$ se tenga que

$$\ell(b_n) < \xi.$$

Como T tiene altura ω_1 podemos hallar también $t \in \mathrm{Lev}(\xi, T)$. Ahora $\{s\} = \{s \in T : t < s\}$ no puede ser una cadena en T puesto que un subárbol de un árbol de Souslin también es de Souslin y T está podado. Así, podemos hallar s' y s_2 en T incomparables y mayores que t. Repitiendo el razonamiento para s' en lugar de t, sabemos que podemos hallar nodos incompatibles s_0 y s_1 que son mayores que s' y por lo tanto mayores que t; en resumen tenemos s_0, s_1 y s_2 todos incomparables y mayores que t.

Sean $a_i \in [T]$ tales que $s_i \in a_i$ para cada $i \in 3$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a_0 \trianglelefteq a_1 \trianglelefteq a_2$. Entonces (a_0, a_2) es un intervalo no vacío en el orden $([T], \trianglelefteq)$ y este intervalo no contiene a ningún b_n porque $\ell(b_n) < \xi$, para cada $n \in \omega$.

Ahora veamos la otra condición que define a las líneas de Souslin; o sea, que la máxima cantidad de intervalos abiertos, ajenos por pares y no vacíos es a lo más numerable. En efecto, supóngase que $\{(a_\xi, b_\xi) : \xi < \omega_1\}$ es una familia de intervalos abiertos no vacíos y ajenos por pares. Entonces escójanse $c_\xi \in (a_\xi, b_\xi)$ y α_ξ tal que

$$\max\{\beta(a_\xi, c_\xi), \beta(c_\xi, b_\beta)\} < \alpha_\xi < \ell(c_\xi).$$

Poco análisis se requiere para convencerse de que para $\xi \neq \eta$ se debe tener que $c_\xi(\alpha_\xi)$ es incomparable con $c_\eta(\alpha_\eta)$; de este modo se obtiene una anticadena no numerable $\{c_\xi(\alpha_\xi) : \xi < \omega_1\}$ en el árbol de Souslin T; una contradicción.

Recíprocamente mostraremos que si $(L, \trianglelefteq)$ es una línea de Souslin, entonces podemos construir un árbol de Souslin.

Observación 1. *Podemos suponer que ningún subconjunto abierto no vacío de L es separable.*

Por el momento supondremos este preliminar para completar la demostración del teorema y estableceremos esto al final como un lema.

Sea $\mathcal{I}$ la familia de todos los intervalos no vacíos y abiertos de L; así que los elementos de $\mathcal{I}$ son de la forma (a, b), donde $a, b \in L$ y $a \triangleleft b$. Podemos usar a $\supseteq$ como un orden parcial sobre $\mathcal{I}$.

[4] Antes habíamos usado esta misma notación en un sentido un poquito diferente; pero esencialmente es lo mismo.

Recursivamente construiremos $\mathcal{I}_\beta \subseteq \mathcal{I}$, para $\beta < \omega_1$, de modo que:

(1) Los elementos de $\mathcal{I}_\beta$ son ajenos por pares;
(2) $\bigcup \mathcal{I}_\beta$ es denso en L y
(3) si $\alpha < \beta$, $I \in \mathcal{I}_\alpha$ y $J \in \mathcal{I}_\beta$, entonces o bien
  (a) $I \cap J = \emptyset$ o
  (b) $J \subseteq I$ y $I \setminus \mathrm{cl}\,(J) \neq \emptyset$.

Si podemos hacer la recursión, hacemos $T = \bigcup_{\beta<\omega_1} \mathcal{I}_\beta$. Por las condiciones (1) a (3), se tiene que $\supseteq$ es un orden que hace a T un árbol y $\mathcal{I}_\beta = \mathrm{Lev}\,(\beta, T)$. Si A es una anticadena, entonces los elementos de A son ajenos por pares y por lo tanto se debe tener que $|A| \leq \aleph_0$. Tampoco es posible que T tenga cadenas no numerables puesto que si $\{I_\xi > \xi < \omega_1\}$ fuera una cadena, con $\xi < \eta \Rightarrow I_\xi \supset I_\eta$, entonces por (3b) se tiene que:

$$\xi < \eta \Rightarrow (I_\eta \subset I_\xi \ \wedge \ I_\xi \setminus \mathrm{cl}\,(I_\eta) \neq \emptyset)\,,$$

con lo que de la familia $\{I_\xi \setminus \mathrm{cl}\,(I_{\xi+1}) : \xi < \omega_1\}$ se puede construir fácilmente una familia no numerable de intervalos ajenos por pares y todos no vacíos. Eso contradiría que L es una línea de Souslin. Finalmente, $|T| = \aleph_1$ porque de (2) se sigue que cada $\mathcal{I}_\beta \neq \emptyset$; por lo tanto T tiene altura ω_1 y así es un árbol de Souslin.

Para terminar con esta demostración, hagamos la recursión. $\mathcal{I}_0$ es cualquier subfamilia de $\mathcal{I}$ que sea maximal con respecto a ser ajena por pares. La maximalidad garantizará que $\bigcup \mathcal{I}_0$ es denso en L. Dado $\mathcal{I}_\alpha$, defínase $\mathcal{I}_{\alpha+1}$ como sigue: Para $I \in \mathcal{I}_\alpha$, sea $\mathcal{K}_I$ una subfamilia de

$$\{K \in \mathcal{I} : K \subset I \ \wedge \ I \setminus \mathrm{cl}\,(J) \neq \emptyset\}$$

que sea maximal con respecto a ser ajena por pares. Sea $\mathcal{I}_{\alpha+1} = \bigcup \{\mathcal{K}_I : I \in \mathcal{I}_\alpha\}$.

Por último, si γ es un ordinal límite y se han definido $\mathcal{I}_\alpha$, para $\alpha < \gamma$ que satisfacen (1), (2) y (3) para $\alpha < \beta < \gamma$. Sea

$$\mathcal{K} = \{K \in \mathcal{I} : (\forall \alpha < \gamma)\,(\forall I \in \mathcal{I}_\alpha)\,(I \cap K = \emptyset \ \vee \ (K \subset I \ \wedge \ I \setminus \mathrm{cl}\,(J) \neq \emptyset))\}$$

y sea $\mathcal{I}_\gamma$ una subfamilia de $\mathcal{K}$ que sea maximal con respecto a ser ajena por pares. Claramente se satisfacen (1) y (3) para todo $\alpha < \beta \leq \gamma$ y debemos verificar también que (2) se sigue cumpliendo; es decir, debemos ver que $\bigcup \mathcal{I}_\gamma$ es denso en L.

Sea $J \in \mathcal{I}$ y sea E el conjunto de todos los extremos izquierdos y derechos de todos los intervalos en $\bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{I}_\alpha$. Entonces E es un conjunto numerable y como J no es separable, debe existir $K_1 \in \mathcal{I}$ tal que $K_1 \subset J$ y $K_1 \cap E = \emptyset$. Si $I \in \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{I}_\alpha$, entonces K_1 no contiene los puntos extremos de I y por lo tanto se debe tener que $I \cap K_1 = \emptyset$ o $K_1 \subseteq I$. Como L es denso en sí mismo es fácil hallar $K \subset K_1$ tal que $K_1 \setminus \mathrm{cl}\,(K) \neq \emptyset$; entonces $K \subset J$ y $K \in \mathcal{K}$. Puesto que $\mathcal{I}_\gamma$ es una subfamilia maximal de $\mathcal{K}$, se debe tener $I \in \mathcal{I}_\gamma$ tal que $I \cap K \neq \emptyset$. Por lo tanto $J \cap \bigcup \mathcal{I}_\gamma \neq \emptyset$ y esto demuestra (2). $\square$

El teorema anterior establece la equivalencia entra la existencia de líneas de Souslin y árboles de Souslin podados. La equivalencia es más general. Se puede demostrar también que existe un árbol de Souslin si y sólo si existe un árbol podado que es de Souslin. Ya no vamos a presentar ese teorema aquí pero invitamos al lector a consultarlo en [**Ku**].

Lema 5.1. *Si hay una línea de Souslin, entonces hay una línea de Souslin tal que ningún subconjunto abierto no vacío es separable.*

Demostración: Sea Y una línea de Souslin y defina una relación de equivalencia $\sim$ sobre Y haciendo $x \sim y$ si y sólo si el intervalo entre ellos es separable. Sea X el conjunto de las clases de $\sim$-equivalencia.

Si $I \in X$, entonces I es convexo; es decir, $x, y \in I \wedge x < z < y \Rightarrow z \in I$. Ordene linealmente X haciendo $I < J$ si y sólo si algún elemento de I es menor que algún elemento de J.

Veamos primero que cada $I \in X$ es separable. Para esto sea $\mathcal{M}$ una familia de intervalos ajenos por pares, no vacíos de la forma (x, y) con $x, y \in I$. Puesto que Y es una línea de Souslin, $\mathcal{M}$ debe ser numerable y así podemos suponer que $\mathcal{M} = \{(x_n, y_n) : n \in \omega\}$. Como $x_n \sim y_n$ se tiene que (x_n, y_n) es separable y así existe $D_n \subseteq (x_n, y_n)$ que es denso y numerable. Sea $D = \bigcup_{n\in\omega} D_n$; entonces D es denso en $\bigcup_{n\in\omega}(x_n, y_n)$. Ahora si $z \in I$ y $z \in (x, y)$, entonces (x, y) intersecta algún elemento de $\mathcal{M}$ por la maximalidad; esto implica que $z \in \mathrm{cl}\,(D)$ salvo que z es el primer o el último elemento de I. Así D con posiblemente dos elementos más será un conjunto denso en I.

Por otra parte, X es denso en sí mismo porque si $I < J$, pero $(I, J) = \emptyset$; entonces tomando $x \in I$ y $y \in J$ se tiene que $(x, y) \subseteq I \cup J$ que es separable implicando así que $x \sim y$, que es una contradicción.

Para terminar basta con observar que (I, J) no es separable siempre que $I < J$. Si lo fuera y $\{K_n : 2 \leq n < \omega\}$ fuera un denso en (I, J); entonces haciendo $K_0 = I$, $K_1 = J$ y tomando, en Y, un denso D_n en cada K_n, se tendría que $\bigcup_{n\in\omega} D_n$ es denso en $\bigcup\{L : I \leq L \leq J\}$ y se conseguiría que puntos de I son equivalentes a puntos en J, una contradicción. □

Muchas aplicaciones de árboles en Topología y Teoría de Conjuntos pueden ser encontradas en la literatura: en el libro de Kechris **[K]** hay muchas aplicaciones en la teoría de los Espacios Polacos o Teoría Descriptiva de Conjuntos. El libro de Bartoszyński y Judah **[BJ]** contiene muchas aplicaciones en Teoría de Conjuntos, particularmente en el estudio de invariantes cardinales del continuo. El artículo de Todorčević **[T]** desarrolla la teoría sobre árboles a un nivel más avanzado.

Referencias

[BJ] Tomek Bartoszyński, Haim Judah. *Set Theory on the structure of the real line.* A. K. Peters Ltd., 1995.

[E] Ryszard Engelking. *General Topology* Second edition. Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[H] Fernndo Hernández-Hernández. *Teoría de Conjuntos: Una introducción.* Aportaciones Matemáticas **13**, Sociedad Matemática Mexicana, 2011.

[HJ] Karel Hrbacek, Thomas Jech. *Introduction to Set Theory.* CRC Press Taylor & Francis Group, 3a. Ed., 1999.

[K] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory.* Springer-Verlag, GTM 156, 1994.

[Ku] Kenneth Kunen. *Set Theory. An introdction to Independece Proofs.* North Holland, 1980.

[M] James R. Munkres. *Topology. A first course.* Prentice Hall, 1975.

[R] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill Book Company, 1953.

[T] Stevo Todorčević. *Trees and linearly ordered sets.* Handbook of Set Theoretic Topology, K. Kunen y J. E. Vaughan, eds. 1984.

Correos electrónicos: `fhernandez@fismat.umich.mx` (Fernando Hernández-Hernández), `dmeza@fismat.umich.mx` (David Meza-Alcántara).