CAPÍTULO 1

Dualidad topológica de las álgebras booleanas

Fernando Hernández-Hernández
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo[1]

David Meza Alcántara
Universidad Nacional Autónoma de México

1. Introducción

En su libro *An Investigation of the Laws of Thought* [**2**] George Boole sentó las bases de la lógica moderna. A través de algunas identidades básicas, conocidas como *leyes del pensamiento*, Boole describió la lógica proposicional clásica. Las estructuras que satisfacen estas identidades son las que hoy conocemos como álgebras booleanas.

Huntington [**5**] fue el primer matemático que trabajó con esta clase de estructuras, que fueron llamadas álgebras booleanas por Scheffer en [**9**].

La inspiración de las identidades propuestas por Boole es doble: En primer lugar, axiomatizar la lógica proposicional, interpretando el álgebra $2 = \{0, 1\}$ como los valores de verdad de las proposiciones y a las operaciones de esta álgebra como la disyunción, conjunción y negación de fórmulas. En segundo lugar, axiomatizar el álgebra de clases, donde las operaciones se interpretan como la unión, intersección y complementación de clases.

En 1921 Emile Post [**7**] demostró que las identidades de Boole axiomatizan de manera completa a la lógica proposicional, en el sentido de que cualquier identidad verdadera en el álgebra 2 es consecuencia de las identidades de Boole.

En 1936 Marshall Stone [**10**] demostró que toda álgebra Booleana es isomorfa a una álgebra de conjuntos (Teorema de Representación de Stone), es decir, las identidades de Boole axiomatizan de manera completa a las álgebras de clases.

Marshall Stone demostró también la dualidad entre las categorías de álgebras booleanas y espacios booleanos (compactos, Hausdorff y cero-dimensionales). La importancia de esta dualidad radica en la posibilidad de conjugar los lenguajes algebraico y topológico y hacer que cada una de estas facetas muestre la riqueza de la otra.

Aún más, los resultados sobre álgebras booleanas tienen repercusiones en otras áreas de interés matemático. Un par de ejemplos en este sentido son: (1) en lógica matemática las pruebas de los teoremas de completud para las lógicas proposicional y de predicados hechas por Helena Rasiowa y Roman Sikorski [**8**], y (2) en teoría de conjuntos, la introducción del concepto de modelos booleano-valuados, que es

[1] La realización de este artículo fue patrocinada por los proyectos UMSNH-CIC-9.23, UMSNH-CIC-9.30 y CONACYT-CB 169078.

particularmente importante porque la construcción de modelos genéricos para las pruebas de independencia puede ser vista en el contexto de estos modelos booleano-valuados.

El presente trabajo pretende mostrar al lector algunos detalles sobre la dualidad de las álgebras booleanas con los espacios topológicos booleanos. En consecuencia, este trabajo se inscribe en las áreas de Álgebra (universal) y Topología, aunque hace énfasis en el aspecto topológico. El material general sobre álgebras booleanas puede ser consultado en [**6**], [**1**] y [**8**]. Los conceptos básicos de topología se pueden consultar en [**11**] y [**3**].

En la primera sección se revisan aspectos generales de las álgebras booleanas, haciendo énfasis en las álgebras características de los espacios topológicos en general y de los espacios booleanos en particular.

En la segunda sección haremos una prueba de los Teoremas de Representación y de la Dualidad de Stone, y en la tercera mostraremos las cualidades de los espacios duales de ciertas clases específicas de álgebras booleanas como las álgebras atómicas, las álgebras sin átomos, las álgebras completas, etc.

2. Preliminares

Esta sección está dedicada a dar cuenta de las definiciones y resultados básicos que se utilizarán a lo largo del texto. Los resultados se consignarán sin demostración. Sin embargo todo este material está expuesto con amplitud en textos como [**1**] y [**8**].

Hay dos maneras usuales de definir las álgebras booleanas. Empezaremos por la algebraica. Una *álgebra booleana* es una tupla $\mathbb{A} = \langle A, +, \cdot, \ ^c, 0, 1\rangle$, donde A es un conjunto, 0 y 1 son dos elementos (distintos) de A, $+$ y $\cdot$ son operaciones binarias sobre A y $\ ^c$ es una operacíon unitaria sobre A, que satisfacen que para todos $a, b, c \in A$,

(1)	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	conmutatividad
(2)	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	asociatividad
(3)	$(a + b) \cdot b = b$	$(a \cdot b) + b = b$	absorción
(4)	$a + a^c = 1$	$a \cdot a^c = 0$	complementos
(5)	$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$	$(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$	distributividad

Ejemplos de álgebras booleanas son las *álgebras potencia* de conjuntos, es decir, la tupla $\langle \mathcal{P}(I), \cup, \cap, I\setminus, \emptyset, I\rangle$ es una álgebra booleana, para cualquier conjunto I. Otro ejemplo, $FC(I)$ la familia de subconjuntos finitos o de complemento finito de I es llamada el álgebra finita-cofinita de I, donde I es cualquier conjunto infinito.

En lo sucesivo, mantendremos la convención de denotar por A, B, etc al conjunto subyacente del álgebra $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, respectivamente. Ahora revisamos la definición de álgebra booleana en términos de teoría de órdenes.

Una *retícula* es un conjunto parcialmente ordenado $\langle R, \leq\rangle$ en el que para cada par de elementos hay un supremo (mínima cota superior) y un ínfimo (máxima cota inferior). En retículas con elementos máximo y mínimo se define un *complemento* de un elemento a como un elemento a' de la retícula cuyo supremo con a es el máximo de la retícula y cuyo ínfimo con a es el mínimo de la retícula. Una retícula es *complementada* cuando tiene máximo y mínimo y cada elemento tiene un complemento. Es costumbre denotar al supremo (resp. ínfimo) del par $\{a, b\}$ mediante $a \vee b$ (resp. $a \wedge b$). Una retícula es *distributiva* si $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ para todos $a, b, c \in R$. Se demuestra que en las retículas complementadas y distributivas, todo elemento tiene un único complemento. También es rutinario probar que, definiendo sobre R las operaciones $a + b := a \vee b$, $a \cdot b := a \wedge b$, a^c como el complemento de a, 0 y 1 como el mínimo y máximo de R respectivamente, entonces la estructura resultante es una álgebra booleana, si R es una retícula complementada y distributiva. Recíprocamente, si $\mathbb{A}$ es una álgebra booleana y sobre A se define la relación $\leq$ de modo que para todos $a, b \in A$, $a \leq b$ si y sólo si $a \vee b = b$ (o equivalentemente, $a \wedge b = a$), entonces $\langle A, \leq \rangle$ es una retícula complementada y distributiva. En lo sucesivo usaremos las notaciones $+, \cdot$ y $\vee, \wedge$ de manera indistinta.

Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. Un *filtro* en $\mathbb{A}$ es un subconjunto F de A que satisface las siguientes condiciones: (1) $1 \in F$ y $0 \notin F$, (2) si $a, b \in F$ entonces $a \wedge b \in F$ y (3) si $a \in F$ y $b \geq a$ entonces $b \in F$. De manera dual se define la noción de *ideal*, el cual es un subconjunto I de A que satisface (1) $0 \in I$ y $1 \notin I$, (2) si $a, b \in I$ entonces $a \vee b \in I$, y (3) si $a \in I$ y $b \leq a$ entonces $b \in I$. Dado un filtro F en una álgebra booleana $\mathbb{A}$, se define el *ideal dual de* F como el conjunto $I_F = \{a \in A : a^c \in F\}$. Análogamente, dado un ideal I en $\mathbb{A}$, se define el *filtro dual de* I como el conjunto $F_I = \{a \in A : a^c \in I\}$.

Se dice que un elemento a de una álgebra booleana $\mathbb{A}$ es *positivo* si $a \neq 0$, y se denota por A^+ al conjunto de elementos positivos de A. Claramente los filtros están formados siempre por elementos positivos del álgebra. Un subconjunto P de A tiene la *propiedad de intersección finita* (pif) si todos los ínfimos de subconjuntos finitos de P son positivos. Es un resultado sencillo y clásico que para todo subconjunto P de A, éste está contenido en algún filtro si y sólo si satisface la pif. El *filtro generado* por un conjunto P se define como el mínimo filtro que contiene a P. Una *base* para un filtro F es cualquier subconjunto P de A que genere a F. Se dice que un filtro F es *principal* cuando éste tiene una base que consta de un único elemento de $A \setminus \{0\}$, es decir, cuando existe $a \in A$ tal que $F = \{x \in A : a \leq x\}$.

Un filtro F en una álgebra booleana $\mathbb{A}$ es un *ultrafiltro* si para cualquier $a \in A$, o bien $a \in F$ o bien $a^c \in F$. Dos resultados de mucha utilidad son los siguientes teoremas clásicos.

TEOREMA 2.1. *Sea F un filtro en una álgebra booleana $\mathbb{A}$. Son equivalentes:*

(1) *F es un ultrafiltro.*
(2) *F es* filtro primo, *es decir, para cualesquiera $a, b \in A$ con $a \vee b \in F$ se tiene que o bien $a \in F$ o $b \in F$.*
(3) *F es un* filtro maximal, *es decir, para cada filtro G tal que $F \subseteq G$ se tiene que $G = F$.* □

TEOREMA 2.2 (Teorema del ultrafiltro; Ulam, 1929; Tarski, 1930). *Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y F un filtro en $\mathbb{A}$. Existe un ultrafiltro U en $\mathbb{A}$ tal que $F \subset U$.*

Inmediatamente se sigue que si P tiene la pif entonces existe un ultrafiltro U en $\mathbb{A}$ tal que $P \subseteq U$.

Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ álgebras booleanas. Un *homomorfismo* de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ es una función $f : A \to B$ tal que $f(0) = 0, f(1) = 1$ y para todos $x, y \in A$,

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \quad \text{y} \quad f(x^c) = f(x)^c$$

Un *monomorfismo* de álgebras booleanas es un homomorfismo inyectivo[2]. Un *epimorfismo* es un homomorfismo suprayectivo. Un *isomorfismo* es un homomorfismo biyectivo.

Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de álgebras booleanas. Se define el *núcleo* de f por

$$nuc(f) = \{a \in A : f(a) = 0\}.$$

El dual del núcleo de un homomorfismo f es conocido como la *coraza* de f, y será denotado por $cor(f)$. Es muy sencillo demostrar que el núcleo de un homomorfismo es un ideal en el dominio, la coraza de un homomorfismo es un filtro en el dominio y la imagen de un homomorfismo es una subálgebra del contradominio.

También es sencillo demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes para cualquier homomorfismo de álgebras booleanas $f : A \to B$.

(1) f es monomorfismo.
(2) $nuc(f) = \{0\}$
(3) $cor(f) = \{1\}$

Dado un ideal I en una álgebra booleana $\mathbb{A}$, se define la *congruencia módulo I* denotada por $\sim_I$ como sigue: Para cualesquiera $a, b \in A$,

$$a \sim_I b \text{ si y sólo si existe } c \in I \text{ tal que } a \vee c = b \vee c$$

Como es de esperarse, la congruencia módulo I es una relación de equivalencia. Denotaremos a la clase de equivalencia de a módulo I por $[a]_I$. Además, $\sim_I$ es una relación de congruencia, es decir, *respeta* las operaciones booleanas, es decir, el cociente $A/_{\sim_I}$ es una álgebra booleana al ser dotado con las operaciones definidas por representantes, $[a]_I \vee [b]_I := [a \vee b]_I$, $[a]_I \wedge [b]_I := [a \wedge b]_I$ y $[a]_I^c := [a^c]_I$. Es común denotar al cociente con $\mathbb{A}/_I$ y llamarle *álgebra cociente de $\mathbb{A}$ módulo I*. Como siempre, también es posible definir la congruencia módulo F con F filtro en $\mathbb{A}$, de manera dual a la definición anterior. Las álgebras cociente módulo I y módulo F_I (el filtro dual de I) son isomorfas, desde que para cada $a \in A$, la clase $[a]_I$ es igual a la clase $[a]_{F_I}$. La proyección canónica $\pi_I : A \to A/_I$ dada por $\pi(a) = [a]_I$ es un epimorfismo de álgebras booleanas.

TEOREMA 2.3 (de isomorfismos). *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ álgebras booleanas, y $f : A \to B$ epimorfismo. Existe un único isomorfismo*
$\bar{f} : A/nuc(f) \to B$ tal que $f = \bar{f} \circ \pi_{nuc(f)}$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{nuc(f)}"'] & & B \\ & A/_{nuc(f)} \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

DEMOSTRACIÓN: Se define $\bar{f} : A/nuc(f) \to B$ como sigue: Para cada $a \in A$, $\bar{f}([a]) = f(a)$. Nótese que la definición de $\bar{f}([a])$ no depende de representantes, puesto que si $b \in [a]$ entonces $f(b) = f(a)$. Es claro que $\bar{f}$ hace conmutar el diagrama y que es epimorfismo. Dado que $[a] \neq [b]$ implica $f(a) \neq f(b)$, tenemos que $\bar{f}$ es monomorfismo. Si $g : A/nuc(f) \to B$ y existe $a \in A$ tal que $g([a]) \neq$

[2]Es fácil demostrar que los homomorfismos inyectivos son cancelables por la izquierda y los homomorfismos suprayectivos son exactamente los homomorfismos cancelables por la derecha.

$\bar{f}([a]) = f(a)$, entonces g no hace conmutar el diagrama, lo cual prueba la unicidad de $\bar{f}$. $\square$

Como consecuencia de este teorema, tenemos que *las imágenes homomórficas de las álgebras booleanas son esencialmente los cocientes* módulo un filtro o un ideal.

2.1. El álgebra de cerrado-abiertos de un espacio topológico. Supondremos conocidas las nociones elementales de la topología general (espacio topológico, conjuntos abiertos, cerrados, bases, etc). Denotaremos a los espacios topológicos y a sus conjuntos subyacentes mediante letras mayúsculas X, Y, Z mientras esto no provoque confusión. Discutiremos específicamente sobre los espacios booleanos, que se definen a continuación. Un espacio topológico X es *cerodimensional* si tiene una base de conjuntos cerrados (y abiertos). X es *booleano* si es compacto, Hausdorff y cerodimensional. En todo espacio topológico X, la familia

$$Clop(X) = \{A \subset X : A \text{ es cerrado-abierto}\}$$

es una álgebra de conjuntos. Más aún, en un espacio booleano X, el álgebra característica $Clop(X)$ es una base para la topología de X.

TEOREMA 2.4. *Sea X un espacio booleano. $Clop(X)$ es la única subálgebra de $\mathcal{P}(X)$ que es base para la topología de X.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B}$ una subálgebra de $\mathcal{P}(X)$ que es base para X. Como $\mathcal{B}$ está cerrada bajo complementos, todo elemento de B es cerrado, por lo tanto $\mathcal{B} \subseteq Clop(X)$. Veamos que $Clop(X) \subseteq \mathcal{B}$. Sea $V \in Clop(X)$. Como $V \subset X$ es cerrado y X es compacto, V también es compacto. Por cada $x \in V$, sea $U_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subseteq V$. Como V es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in V$ tales que $U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} = V$. Esto prueba que V es unión finita de elementos de $\mathcal{B}$, por lo que $V \in \mathcal{B}$. $\square$

2.2. El espacio de Stone de una álgebra booleana. Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. Llamaremos $Ult(\mathbb{A})$ al conjunto de ultrafiltros sobre $\mathbb{A}$. Se define la función $s : A \to \mathcal{P}(Ult(\mathbb{A}))$ (conocida como *mapeo de Stone*) por

$$s(a) = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \in p\}.$$

El conjunto de ultrafiltros $Ult(\mathbb{A})$ sobre una álgebra booleana dada $\mathbb{A}$ puede ser dotado de manera natural con una topología, llamada la *topología de Stone*, que tiene a la familia $s[\mathbb{A}] = \{s(a) : a \in A\}$ como base (es simple verificar que esta familia satisface lo necesario para ser base para alguna topología). Este espacio se conoce como *espacio de Stone* de $\mathbb{A}$. Es sencillo verificar que para cada $a \in A$, $s(a) \cup s(a^c) = Ult(\mathcal{A})$ y $s(a) \cap s(a^c) = \emptyset$, por lo que el espacio de Stone de $\mathbb{A}$ es cerodimensional. Ahora veamos que $Ult(\mathbb{A})$ es compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $Ult(\mathbb{A})$. Podemos suponer que los elementos de $\mathcal{U}$ son básicos. De este modo $\mathcal{U} = \{s(a) : a \in A'\}$ para algún $A' \subseteq A$. Si ningún subconjunto finito de $\mathcal{U}$ cubre a $Ult(\mathbb{A})$ entonces para todo $n \in \omega$ y $a_1, \ldots, a_n \in A'$ sucede que $s(a_1) \cup \cdots \cup s(a_n) \neq Ult(\mathbb{A})$. De aquí que $a_1 \vee \cdots \vee a_n \neq 1$ y en consecuencia $a_1^c \wedge \cdots \wedge a_n^c \neq 0$. Esto quiere decir que el conjunto $-A' := \{a^c : a \in A'\}$ tiene la pif. Por el Teorema del Ultrafiltro, existe un ultrafiltro $p \in Ult(\mathbb{A})$ tal que $-A' \subseteq p$. Además, para cada $a \in A'$ sucede que $a^c \in p$, por tanto, $a \notin p$, de donde, para cada $a \in A'$, $p \notin s(a)$, lo cual contradice la suposición de que $\mathcal{U}$ cubre a $Ult(\mathbb{A})$.

Ahora veamos que el espacio de Stone de $\mathbb{A}$ es Hausdorff. Sean $p \neq q \in Ult(\mathbb{A})$. Observemos que existe $a \in A$ tal que $a \in p$ y $a \notin q$. De este modo, $a^c \in q$, así que $p \in s(a)$ mientras $q \in s(a^c)$. Con todo esto tenemos probado que *el espacio de Stone de una álgebra booleana* $\mathbb{A}$ *es siempre un espacio booleano.*

3. Teoremas de Representación y Dualidad.

En primer lugar, demostraremos el Teorema de Representación de las álgebras booleanas, enunciado y demostrado por Marshall Stone en [**10**]. La versión más popular de este teorema afirma que *toda álgebra booleana es isomorfa a una álgebra de conjuntos*. Enunciaremos y demostraremos una versión más explícita.

TEOREMA 3.1 (de Representación, Stone, 1936). *Toda álgebra booleana es isomorfa al álgebra característica de un espacio booleano, concretamente, el espacio dual de* $\mathbb{A}$*; y el mapeo de Stone es un isomorfismo de* $\mathbb{A}$ *sobre* $Clop(Ult(\mathbb{A}))$*.*

DEMOSTRACIÓN: Es suficiente demostrar la última afirmación del Teorema. Primero probemos que s es homomorfismo de álgebras booleanas. En efecto, si $a, b \in A$ entonces $s(a \wedge b) = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \wedge b \in p\} = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \in p \text{ y } b \in p\} = s(a) \cap s(b)$. Por otro lado, $s(a \vee b) = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \vee b \in p\} = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \in p \text{ o } b \in p\} = s(a) \cup s(b)$ y finalmente $s(a^c) = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a^c \in p\} = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \notin p\} = Ult(\mathbb{A}) \setminus s(a)$. Además, es evidente que $s(0) = \emptyset$ y $s(1) = Ult(\mathbb{A})$.

Ahora veamos que s es inyectiva. Sean $a \neq b \in A$. De aquí se tienen que, o bien $a \nleq b$ o $b \nleq a$. Supongamos que $a \nleq b$ (el otro caso es análogo). De este modo, $a \wedge b^c \neq 0$, por lo que existe un ultrafiltro $p \in Ult(\mathbb{A})$ tal que $a \wedge b^c \in p$. Tal p satisface que $a \in p$ y $b \notin p$. Esto demuestra que $s(a) \neq s(b)$.

Finalmente, la suprayectividad es consecuencia de 2.4, y de que la imagen bajo homomorfismo de una álgebra booleana es una subálgebra del contradominio. □

Ahora nos ubicaremos en el contexo de los espacios booleanos y sus álgebras características. Para tal efecto, consideremos la función $t : X \to \mathcal{P}(Clop(X))$, (o t_X si hay riesgo de confusión) dado por

$$t(x) = \{U \in Clop(X) : x \in U\},$$

donde X es un espacio booleano.

LEMA 3.1. *Sea* X *un espacio booleano. Para cada* $x \in X$ *el conjunto* $t(x)$ *es un ultrafiltro en el álgebra* $Clop(X)$*.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que $\emptyset \notin t(x)$ y $X \in t(x)$. Sean $U, V \in t(x)$. Claramente, $x \in U \cap V$ y $U \cap V \in Clop(X)$. Si $W \in Clop(X)$ y $U \subseteq W$, es claro que $x \in W$. Todo esto prueba que $t(x)$ es filtro. Ahora bien, dado $U \in Clop(X)$, sucede que $x \in U$ o $x \in X \setminus U$. En consecuencia $U \in t(x)$ o $X \setminus U \in t(x)$. □

De este modo queda definido un mapeo $t : X \to Ult(Clop(X))$, que es conocido como el *homeomorfismo canónico de Stone*. A continuación veremos que en efecto es un homeomorfismo.

TEOREMA 3.2. *Todo espacio booleano es homeomorfo al espacio de Stone de su álgebra característica. Más precisamente, para cada espacio booleano* X*, el mapeo* $t : X \to Ult(Clop(X))$ *es un homeomorfismo de* X *sobre* $Ult(Clop(X))$*.*

Demostración: Veamos que t es biyectiva. Sean $x \neq y \in X$. Como X es Hausdorff, existen $U, V \in Clop(X)$ ajenos tales que $x \in U$ y $y \in V$. En consecuencia, $x \in U \subseteq X \setminus V$, por lo que $V \notin t(x)$, pero claramente $V \in t(y)$. Esto prueba que $t(x) \neq t(y)$ por lo que t es inyectiva. Sea p un ultrafiltro en $Clop(X)$. Así $\cap p$ es la intersección de una familia de cerrados con la pif en el compacto X. Por lo tanto, $\cap p \neq \emptyset$. Sea $x \in \cap p$. Claramente, $p \subseteq t(x)$, pero la maximalidad de p obliga que $p = t(x)$. Esto prueba que t es suprayectiva. Sea V un abierto básico en $Ult(Clop(X))$. Esto quiere decir que hay un $W \in Clop(X)$ tal que $V = \{p \in Ult(Clop(X)) : W \in p\}$. Observe que si $x \in W$ entonces $W \in t(x)$, por tanto $t(x) \in V$. Observe, por otro lado, que si $x \in X$ es tal que $t(x) \in V$ entonces $W \in t(x)$, por lo que $x \in W$. Ambas observaciones prueban que $t^{-1}(V) = W$, lo cual prueba que t es continua. Ahora bien, si $U \subset X$ es abierto básico entonces $t[U] = \{t(x) : x \in U\} = \{p \in Ult(Clop(X)) : U \in p\}$ es un abierto básico en $Ult(Clop(X))$. Esto prueba que t es abierta y concluye la demostración.

□

Denotaremos con **BA** a la categoría de álgebras booleanas, cuyos morfismos son los homomorfismos de álgebras booleanas. Denotaremos con **BS** a la categoría de espacios (topológicos) booleanos con las funciones continuas como morfismos. La función Ult resulta ser un funtor contravariante de **BA** en **BS**, y $Clop$ resulta ser un funtor también cotravariante de **BS** en **BA**. Los teoremas 3.1 y 3.2 muestran que salvo isomorfismo, Ult y $Clop$ son inversas, lo cual se ilustra en el diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{BA} \arrow[r, bend left, "Ult"] & \mathbf{BS} \arrow[l, bend left, "Clop"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[dr, mapsto] \arrow[dd, "s", "\cong"'] & \\
& Ult(\mathbb{A}) \arrow[dl, mapsto] \\
Clop(Ult(\mathbb{A})) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, mapsto] \arrow[dd, "t"', "\simeq"] \\
Clop(X) \arrow[dr, mapsto] & \\
& Ult(Clop(X))
\end{tikzcd}$$

El teorema de la dualidad de Stone expresa que las categorías **BA** y **BS** son *dualmente equivalentes*, es decir, los diagramas conmutativos en una de ellas se traducen en diagramas conmutativos en la otra. A continuación los detalles, empezando por un lema que el lector encontrará muy fácil de demostrar.

LEMA 3.2. *Sean $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ álgebras booleanas, $f : A \to B$ homomorfismo de álgebras booleanas y p un ultrafiltro en $\mathbb{B}$. Entonces, la preimagen $f^{-1}[p]$ es un ultrafiltro en $\mathbb{A}$. Sean X, Y espacios booleanos, $\phi : X \to Y$ continua y $V \subseteq Y$ cerrado y abierto en Y. Entonces la preimagen $\phi^{-1}[V]$ es cerrado-abierto en X.* □

Denotaremos con $s_{\mathbb{A}} : A \to Clop(Ult(\mathbb{A}))$ al mapeo de Stone para el álgebra $\mathbb{A}$, y denotaremos con $t_X : X \to Ult(Clop(X))$ al homeomorfismo canónico de Stone para el espacio X.

DEFINICIÓN 3.1. *(Mapeos Duales)*

(1) *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ álgebras booleanas y $f : A \to B$ un homomorfismo de álgebras booleanas. El* dual *de f es el mapeo $f^d : Ult(\mathbb{B}) \to Ult(\mathbb{A})$ definido por*
$$f^d(p) = f^{-1}[p]$$
para cada $p \in Ult(\mathbb{B})$.

(2) *Sean X, Y espacios booleanos y $\phi : X \to Y$ una función continua. El* dual *de ϕ es el mapeo $\phi^d : Clop(Y) \to Clop(X)$ dado por*
$$\phi^d(U) = \phi^{-1}[U]$$
para todo $U \in Clop(Y)$.

El Teorema de la Dualidad enumera las propiedades de estos mapeos duales.

TEOREMA 3.3 (Dualidad de Stone). *Sean $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ álgebras booleanas, $f : A \to B$, $g : B \to C$ homomorfismos de álgebras booleanas, X, Y, Z espacios booleanos, y $\phi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ funciones continuas. Entonces:*

(1) *$f^d : Ult(\mathbb{B}) \to Ult(\mathbb{A})$ es continua y $\phi^d : Clop(Y) \to Clop(X)$ es homomorfismo de álgebras booleanas.*
(2) *$(id_{\mathbb{A}})^d = id_{Ult(\mathbb{A})}$ y $(id_X)^d = id_{Clop(X)}$*
(3) *$(g \circ f)^d = f^d \circ g^d$ y $(\psi \circ \phi)^d = \phi^d \circ \psi^d$*
(4) *$f^{dd} \circ s_{\mathbb{A}} = s_{\mathbb{B}} \circ f$ y $\phi^{dd} \circ t_X = t_Y \circ \phi$. Es decir, los diagramas*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s_A} & Clop(Ult(A)) \\ \downarrow f & & \downarrow f^{dd} \\ B & \xrightarrow[s_B]{} & Clop(Ult(B)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{t_X} & Ult(Clop(X)) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi^{dd} \\ Y & \xrightarrow[t_Y]{} & Ult(Clop(Y)) \end{array}$$

conmutan.

(5) *f es inyectiva si y sólo si f^d es suprayectiva. ϕ es inyectiva si y sólo si ϕ^d es suprayectiva.*
(6) *f es suprayectiva si y sólo si f^d es inyectiva. ϕ es suprayectiva si y sólo si ϕ^d es inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN: (1) Veamos que las preimágenes bajo f^d de abiertos básicos en $Ult(\mathbb{A})$ son abiertos en $Ult(\mathbb{B})$. Sea $a \in A$. Llamemos $U = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \in p\}$. Así $(f^d)^{-1}[U] = \{q \in Ult(\mathbb{B}) : f^d(q) \in U\} = \{q \in Ult(\mathbb{B}) : a \in f^{-1}[q]\} = \{q \in Ult(\mathbb{B}) : f(a) \in q\}$, lo cual prueba que $(f^d)^{-1}[U]$ es un abierto (básico) de $Ult(\mathbb{B})$.

Ahora veamos que si $U, V \in Clop(Y)$ entonces $\phi^d(U \cap V) = \phi^d(U) \cap \phi^d(V)$. Pero $\phi^d(U \cap V) = \phi^{-1}[U \cap V] = \phi^{-1}[U] \cap \phi^{-1}[V] = \phi^d(U) \cap \phi^d(V)$. Análogamente, $\phi^d(U \cup V) = \phi^d(U) \cup \phi^d(V)$ y $\phi(Ult(Y) \setminus U) = Ult(X) \setminus \phi(U)$. Claramente, $\phi^d(Y) = X$ y $\phi^d(\emptyset) = \emptyset$, lo cual prueba que ϕ^d es homomorfismo de álgebras booleanas.

(2) Si $p \in Ult(\mathbb{A})$ entonces $(Id_{\mathbb{A}})^d(p) = (Id_{\mathbb{A}})^{-1}[p] = p$. Si $U \in Clop(X)$ entonces $(Id_X)^d(U) = (Id_X)^{-1}[U] = U$.

(3) Sea $p \in Ult(\mathbb{C})$. Así $(g \circ f)^d(p) = \{a \in A : g(f(a)) \in p\} = \{a \in A : f(a) \in g^d(p)\} = f^d(g^d(p)) = (f^d \circ g^d)(p)$.

Ahora sea $U \in Clop(Z)$. Así $(\psi \circ \phi)^d(U) = \{x \in X : \psi(\phi(x)) \in U\} = \{x \in X : \phi(x) \in \psi^d(U)\} = (\phi^d \circ \psi^d)(U)$.

(4) Sea $a \in A$. De este modo, $f^{dd}(s_{\mathbb{A}}(a)) = f^{dd}(\{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \in p\}) = (f^d)^{-1}[\{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \in p\}] = \{q \in Ult(\mathbb{B}) : a \in f^d(q)\} = \{q \in Ult(\mathbb{B}) : a \in f^{-1}[q]\} = \{q \in Ult(\mathbb{B}) : f(a) \in q\} = s_{\mathbb{B}}(f(a))$.

Ahora sea $x \in X$. De este modo, $\phi^{dd}(t_X(x)) = \phi^{dd}(\{U \in Clop(X) : x \in U\}) = (\phi^d)^{-1}[\{U \in Clop(X) : x \in U\}] = \{V \in Clop(Y) : x \in \phi^d(V)\} = \{V \in Clop(Y) : x \in \phi^{-1}(V)\} = \{V \in Clop(Y) : \phi(x) \in V\} = t_Y(\phi(x))$.

(5) Supongamos que f es inyectiva y $p \in Ult(\mathbb{A})$. Como $nuc(f) = \{0_{\mathbb{A}}\}$, la imagen $f[p]$ es un conjunto con la pif en $\mathbb{B}$. Por el Teorema del Ultrafiltro existe $q \in Ult(\mathbb{B})$ tal que $f[p] \subseteq q$. De este modo, $p \subseteq f^{-1}(f[p]) \subseteq f^{-1}(q) = f^d(q)$. Pero por la maximalidad de p, tenemos que $p = f^d(q)$, lo cual demuestra la suprayectividad de f^d. Ahora supongamos que f^d es suprayectiva. Si $a \in A^+$ entonces por Teorema del Ultrafiltro existe $p \in Ult(\mathbb{A})$ tal que $a \in p$. Por la suprayectividad de f^d existe $q \in Ult(\mathbb{B})$ tal que $f^d(q) = p$. Esto quiere decir que $a \in f^d(q)$, y como $0_{\mathbb{B}} \notin q$, tenemos que $f(a) \neq 0_{\mathbb{B}}$, lo cual prueba que $nuc(f) = \{0_{\mathbb{A}}\}$.

Ahora supongamos que ϕ es inyectiva y $U \in Clop(X)$. Así, U y $X \setminus U$ son compactos. Dado que ϕ es continua $\phi[U]$ y $\phi[X \setminus U]$ son compactos ajenos, y como Y es cerodimensional, para cada $y \in \phi[U]$ existe $V_y \in Clop(Y)$ tal que $y \in V_y$ y $V_y \cap \phi[X \setminus U] = \emptyset$. Dado que $\phi[U]$ es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $y_1, \ldots, y_n \in \phi[U]$ tales que $\phi[U] \subset V := V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$. Observe que $V \in Clop(Y)$ y $V \cap \varphi[X \setminus U] = \emptyset$. Así pues, $\phi^d(V) = \phi^{-1}[V] = U$, lo cual prueba que ϕ^d es suprayectiva. Ahora supongamos que ϕ^d es suprayectiva. Sean $x \neq y \in X$. Sean $U, V \in Clop(X)$ ajenos y tales que $x \in U$ y $y \in V$. Como ϕ^d es suprayectiva, existen $U', V' \in Clop(Y)$ tales que $U = \phi^{-1}[U']$ y $V = \phi^{-1}[V']$. Claramente, U' y V' son ajenos, $\phi(x) \in U'$ y $\phi(y) \in V'$. Esto prueba que $\phi(x) \neq \phi(y)$, de donde ϕ es inyectiva.

(6) Por el inciso (4) f es suprayectiva si y sólo si f^{dd} es suprayectiva y por el inciso anterior, esto equivale a que f^d sea inyectiva. Análogamente se prueba que ϕ es suprayectiva si y sólo si ϕ^d es inyectiva. □

4. Dualidad topológica

Con el propósito de mostrar el poder de los Teoremas de Representación y de la Dualidad de Stone, analizaremos algunas clases específicas de álgebras booleanas y sus espacios de ultrafiltros.

4.1. Álgebras atómicas. Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. Un elemento a es un *átomo* si es minimal en A^+, es decir, a es positivo y no existe un elemento $x \in A$ tal que $0 < x < a$. $\mathbb{A}$ es *atómica* si para cada $a \in A^+$ existe un átomo $b \in A$ tal que $b \leq a$. Denotaremos con $At(\mathbb{A})$ al conjunto de átomos del álgebra booleana $\mathbb{A}$.

Las álgebras potencia $\mathcal{P}(I)$ de un conjunto I siempre son atómicas. Los átomos de éstas son justamente los unitarios $\{i\}$ con $i \in I$. En la subsección 4.3 daremos ejemplos de álgebras no atómicas. Nótese que si $a \in A$ es un átomo entonces para cada $b \in A^+$, o bien $a \leq b$ o $a \leq b^c$; pues si $a \nleq b$ entonces $a \wedge b^c \in A^+$ y, por la minimalidad de a en A^+, tendríamos que $a = a \wedge b^c$ lo cual equivale a $a \leq b^c$.

Una propiedad importante de los átomos en las álgebras atómicas es la siguiente: Si $b, c \in A$ con $b \nleq c$ entonces hay un átomo a tal que $a \leq b$ y $a \nleq c$.

4.1.1. *Átomos y puntos aislados.* Se dice que un filtro F sobre $\mathbb{A}$ es *principal* si está generado por un único elemento del álgebra, es decir, existe $a \in \mathbb{A}$ tal que $F = \{x \in A : x \geq a\}$. Un filtro principal F es ultrafiltro si y sólo si está generado por un átomo. Es claro que un filtro nunca contiene dos átomos distintos y un átomo nunca pertenece a dos filtros distintos. Con estas observaciones concluimos que por cada átomo en una álgebra booleana $\mathbb{A}$ encontramos un punto aislado en $Ult(\mathbb{A})$ y viceversa, por cada punto aislado p de $Ult(\mathbb{A})$ existe un único átomo a en $\mathbb{A}$ tal que $a \in p$. En conclusión, *para cada álgebra booleana $\mathbb{A}$, existe una correspondencia biyectiva entre los átomos de $\mathbb{A}$ y los puntos aislados de $Ult(\mathbb{A})$.*

En la dirección contraria, si X es un espacio booleano y x es un punto aislado de X, entonces $\{x\}$ es cerrado-abierto y además es un átomo en $Clop(X)$. Además, por la propiedad de Hausdorff, los átomos en una álgebra $Clop(X)$ siempre son conjuntos unitarios, por lo que podemos concluir que existe una correspondencia biyectiva entre los puntos aislados de X y los átomos de $Clop(X)$, para cualquier espacio booleano X.

4.1.2. *Álgebras finitas y espacios discretos.* Toda álgebra booleana finita es claramente atómica. Esto tiene como consecuencia la siguiente versión del Teorema de Representación de Stone para álgebras finitas.

TEOREMA 4.1. *Toda álgebra booleana finita es isomorfa a una álgebra de conjuntos. De hecho, si $\mathbb{A}$ es una álgebra booleana finita, entonces $\mathbb{A}$ es isomorfa al álgebra potencia $\mathcal{P}(At(\mathbb{A}))$.*

DEMOSTRACIÓN: El mapeo $f : A \to \mathcal{P}(At(\mathbb{A}))$ definido por $f(a) = \{x \in At(\mathbb{A}) : x \leq a\}$ es el isomorfismo buscado. La inyectividad de f se debe a que si $b, c \in A$ con $b \nleq c$ entonces existe un átomo $a \in A$ tal que $a \leq b$ y $a \nleq c$. La suprayectividad de f se debe a la finitud de A, pues si $C \subset A$ entonces C es finito, y en consecuencia, $\vee C$ existe en A y así $C = f(\vee C)$. Es simple probar que f es homomorfismo. $\square$

En una álgebra finita, los ultrafiltros son exactamente los filtros principales generados por átomos. De este modo, una álgebra booleana finita $\mathbb{A}$ tiene un espacio de Stone finito, y por ser Hausdorff, $Ult(\mathbb{A})$ es discreto.

Por el contrario, si un espacio X es Hausdorff, compacto y discreto, necesariamente es finito. En conclusión tenemos que *la dualidad de Stone es biyectiva entre las categorías de álgebras booleanas finitas y de espacios booleanos discretos.*

4.1.3. *Álgebras finito-cofinitas y compactaciones por un punto de espacios discretos.* Las álgebras finito-cofinitas son minimales respecto a la cantidad de átomos que contienen, como se demuestra en el siguiente Teorema. Denotemos por $FC(I)$ al álgebra finito-cofinita sobre el conjunto I.

TEOREMA 4.2. *Sean κ un cardinal y $\mathbb{A}$ una álgebra booleana con κ átomos. Entonces existe un monomorfismo $f : FC(\kappa) \to A$ tal que para cada átomo $x \in FC(\kappa)$, $f(x)$ es un átomo en $\mathbb{A}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $g : \kappa \to At(\mathbb{A})$ una biyección. Entonces, para cada $S \in FC(\kappa)$ sea

$$f(S) = \begin{cases} \bigvee_{s \in S} g(s) & \text{si } S \text{ es finito} \\ \bigwedge_{s \in \kappa \setminus S} g(s)^c & \text{si } S \text{ es cofinito} \end{cases}$$

Es sencillo verificar que f es la función buscada. $\square$

Definición 4.1. *Sea* $\mathbb{A}$ *una álgebra booleana. Un subconjunto* D *de* A^+ *es* denso *si para cada* a *en* A *existe* d *en* D *tal que* $d \leq a$.

Si $\mathbb{A}$ es una álgebra atómica, entonces $At(\mathbb{A})$ es un subconjunto denso en $\mathbb{A}$, así que la subálgebra de $\mathbb{A}$ generada por $At(\mathbb{A})$ es una subálgebra densa en $\mathbb{A}$. Pero esta subálgebra es (por el teorema anterior) isomorfa a $FC(|At(\mathbb{A})|)$, de donde, *toda álgebra atómica infinita tiene inmersa una álgebra finito-cofinita.* Ahora revisemos los espacios de Stone de las álgebras finito-cofinitas.

Dado un espacio topológico X Hausdorff, localmente compacto pero no compacto, es posible encajar a éste en un espacio compacto de la siguiente manera: Sea $c \notin X$ y sea $X^* = X \cup \{c\}$. Se definen las vecindades básicas de c en X^* como los conjuntos de la forma $\{c\} \cup (X \setminus L)$ donde L es un subconjunto compacto de X. Las vecindades básicas de los puntos $x \in X$ en X^* son las vecindades de x en X. Así, X^* es un espacio compacto y la inclusión de X en X^* es un encaje. Con esta topología, X^* es llamado la *compactación por un punto* de X. Todo espacio discreto es localmente compacto y Hausdorff, pero sólo los discretos finitos son compactos. Así pues, todo espacio discreto infinito tiene una compactación por un punto.

Teorema 4.3. *Sea* κ *cardinal infinito. El espacio de ultrafiltros de* $FC(\kappa)$ *es homeomorfo a la compactación por un punto del espacio discreto de* κ *elementos.*

Demostración: Los ultrafiltros sobre $FC(\kappa)$ son exactamente los filtros principales sobre los átomos y el filtro p de subconjuntos cofinitos de κ, desde que todo ultrafiltro no principal en una subálgebra de una potencia contiene a todos los cofinitos. Cada ultrafiltro principal es un punto aislado de $Ult(FC(\kappa))$ y las vecindades de p tienen la forma $s(a)$ con $a \in p$, pero $\kappa \setminus a$ es finito, por tanto $Ult(FC(\kappa)) \setminus s(a)$ es finito, y en consecuencia compacto. De este modo, $Ult(FC(\kappa))$ es la compactación por un punto del espacio discreto de κ elementos. □

Por otro lado, si X es la compactación por un punto de algún espacio discreto Y, digamos $X = Y \cup \{c\}$, entonces los subconjuntos finitos de X son cerrado-abiertos y en consecuencia los cofinitos también. Si U es un cerrado-abierto de X consideramos dos casos: si $c \notin U$, entonces U es finito, pues de otro modo no sería compacto; y si $c \in U$ entonces U es cofinito, como todas las vecindades de c. Esto finalmente prueba que los espacios booleanos que son compactación por un punto de un espacio discreto, tienen como álgebra característica una álgebra finito-cofinita.

4.2. Álgebras libres y espacios de Cantor.

4.2.1. *Álgebras libres.* La inspiración de la construcción de álgebras libres se basa en la generación de éstas a partir de conjuntos algebraicamente independientes, es decir, que no satisfacen más ecuaciones que las consecuencias de los axiomas de álgebras booleanas. Cada una de ellas queda caracterizada salvo isomorfismo por el número de generadores libres.

Definición 4.2. *Sea* I *un conjunto. Una álgebra (booleana)* libre *sobre* I *es un par* (e, F) *tal que* F *es una álgebra booleana y* $e : I \to F$ *es tal que para cada función* f *de* I *en una álgebra* A, *existe un único homomorfismo* $g : F \to A$ *tal que* $g \circ e = f$.

Por definición, si $i_1, \dots i_n$ son elementos distintos de I entonces toda ecuación que se satisfaga por los elementos $e(i_1), \dots, e(i_n)$ de F será satisfecha también por *cualesquiera* elementos $a_1, \dots, a_n$ de cualquier álgebra booleana A. Para demostrar la existencia y unicidad de las álgebras libres, empezaremos por estudiar a sus espacios duales, los espacios de Cantor de diferentes pesos.

4.2.2. *Espacios de Cantor.* Se define el *peso* de un espacio topológico X como el mínimo cardinal κ tal que X tiene una base de cardinalidad κ. Denotaremos con 2 al conjunto con dos elementos $2 = \{0, 1\}$ dotado de la topología discreta. Para cada cardinal infinito κ, se define el *espacio de Cantor de peso* κ como el conjunto 2^κ de κ-sucesiones de elementos de 2 dotado con la topología producto. Esto quiere decir que la familia $\mathcal{S} = \{u_i : i \in \kappa\} \cup \{v_i : i \in \kappa\}$ es una subbase para el espacio 2^κ, donde para cada $i \in \kappa$, $u_i = \{x \in 2^\kappa : x_i = 1\}$ y $v_i = \{x \in 2^\kappa : x_i = 0\} = u_i^c$. Note que $\mathcal{S}$ está cerrada bajo complementos. Adicionalmente, la familia $\mathcal{B}$ de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es base para 2^κ. Note que cada elemento de $\mathcal{B}$ es cerrado en 2^κ y que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Por el Teorema de Tychonoff, 2^κ es compacto y claramente es Hausdorff, de donde se concluye que todo espacio de Cantor es booleano.Una observación clave es que todo elemento no trivial de $\mathcal{B}$ (i. e. no vacío y no 2^κ) tiene una única representación de la forma:

$$U(F, G) := \bigcap_{\alpha \in F} u_\alpha \cap \bigcap_{\beta \in G} v_\beta$$

con F y G subconjuntos finitos, ajenos y no ambos vacíos de κ. Finalmente, sea $\mathcal{B}'$ la familia de uniones finitas de elementos de $\mathcal{B}$. Observe que $\mathcal{B}'$ cumple que

- es (trivialmente) cerrada bajo unión binaria,
- es cerrada bajo intersección binaria, pues si $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$ y $F = F_1 \cup \dots \cup F_m$ entonces $E \cap F = \bigcup_{i,j} E_i \cap F_j$, y cada $E_i \cap F_j$ está en $\mathcal{B}$,
- es cerrada bajo complementos, por leyes de Morgan y porque $\mathcal{S}$ lo es, y
- todos sus elementos son cerrado-abiertos.

De este modo, por el Teorema 2.4, $\mathcal{B}' = Clop(2^\kappa)$. Note que $|Clop(2^\kappa)| = \kappa$, lo cual prueba que en efecto, el peso de 2^κ es a lo más κ. Por otro lado, si $\mathcal{U}$ es una familia con menos que κ conjuntos abiertos de 2^κ, entonces existe $\alpha < \kappa$ tal que $\pi_\alpha(U) = 2$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Luego u_α es un abierto que no puede contener elementos de $\mathcal{U}$, por lo que $\mathcal{U}$ no es base, estableciendo que 2^κ no tiene bases de cardinalidad menor que κ.

TEOREMA 4.4 (Existencia). *Sea I un conjunto cualquiera. Entonces existe una álgebra libre sobre I.*

DEMOSTRACIÓN: Sin perder generalidad podemos suponer que $I = \kappa$. Definamos $e(\alpha) = u_\alpha$ y probemos que $(e, Clop(2^\kappa))$ es una álgebra booleana libre, la cual tiene, obviamente, κ generadores. Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $f : \kappa \to A$ cualquier función. Definamos $\overline{f} : \mathcal{B} \to A$ como sigue: $\overline{f}(\emptyset) = 0$, $\overline{f}(2^\kappa) = 1$, y para $U = U(F, G)$ con F y G subconjuntos finitos ajenos y no ambos vacíos de κ, sea $\overline{f}(U) = \bigwedge_{\alpha \in F} f(\alpha) \wedge \bigwedge_{\beta \in G} (f(\beta))^c$. Obsérvese entonces que $\overline{f}$ satisface que si $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ y $U_1 \subseteq U_2$ entonces $\overline{f}(U_1) \leq \overline{f}(U_2)$, desde que si $U_1 = U(F_1, G_1)$ y $U_2 = U(F_2, G_2)$, entonces $F_2 \subseteq F_1$ y $G_2 \subseteq G_1$.

Definamos $g : Clop(2^\kappa) \to A$ por $g(B_1 \cup \dots \cup B_n) = \overline{f}(B_1) \vee \dots \vee \overline{f}(B_n)$ y verifiquemos que esta definición es correcta. Supongamos que $\bigcup_{i=1}^n U(F_i^1, G_i^1) = \bigcup_{j=1}^m U(F_j^2, G_j^2)$. En este caso, para cada i en $\{1, \dots, n\}$ ocurre que $\overline{f}\left(U(F_i^1, G_i^1)\right) = \overline{f}\left(\bigcup_{j=1}^m (U(F_i^1, G_i^1) \cap U(F_j^2, G_j^2)\right) \leq \overline{f}\left(\bigcup_{j=1}^m U(F_j^2, G_j^2)\right) = \bigvee_{j=1}^m \overline{f}\left(U(F_j^2, G_j^2)\right)$.

Por lo tanto, $\bigvee_{i=1}^{n} \overline{f}\left(U(F_i^1, G_i^1)\right) \leq \bigvee_{j=1}^{m} \overline{f}\left(U(F_j^2, G_j^2)\right)$. Análogamente se demuestra la desigualdad en el sentido opuesto. Es claro que $g \restriction \mathcal{B} = \overline{f}$, y que g es un homomorfismo de álgebras booleanas, lo que concluye esta demostración. $\square$

Como también fue ya anunciado, demostraremos que las álgebras libres son únicas salvo isomorfismo, y están caracterizadas por el número de generadores que poseen.

Teorema 4.5 (Unicidad). *Sean (e, F) y (e', F') álgebras libres sobre I e I' respectivamente, y sea $f : I \to I'$ una biyección. Entonces hay un único isomorfismo $g : F \to F'$ tal que $g \circ e = e' \circ f$, es decir, tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"] & F \arrow[d, dotted, "g"] \\ I' \arrow[r, "e'"'] & F' \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración: Sea g el homomorfismo cuya existencia y unicidad se afirman en la definición de álgebra libre aplicada a la función $e' \circ f$, es decir, $g \circ e = e' \circ f$; y sea g' lo mismo, para la función $e \circ f^{-1}$, es decir, $g' \circ e' = e \circ f^{-1}$. Así $g' \circ g$ es un homomorfismo de F en F y $(g' \circ g) \circ e = g' \circ (g \circ e) = g' \circ (e' \circ f) = (g' \circ e') \circ f = (e \circ f^{-1}) \circ f = e$. Pero nuevamente, por definición de álgebra libre, id_F es el único homomorfismo de F en F tal que $id \circ e = e$, por tanto, $g' \circ g = id_F$. Análogamente, $g \circ g' = id_{F'}$, por lo que g es isomorfismo. $\square$

En resumen, para cada cardinal κ, el espacio de Stone del álgebra libre sobre κ es el espacio de Cantor de peso κ, desde que el álgebra libre sobre κ hallada en la prueba del Teorema de existencia es $Clop(2^\kappa)$, es decir, $Clop(2^\kappa) = Fr(\kappa)$. De este modo, por el teorema 3.2, 2^κ es homeomorfo a $Ult(Fr(\kappa))$.

La propiedad universal del álgebra libre sobre un conjunto I de generadores garantiza el siguiente

Teorema 4.6. *Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y κ un cardinal con $|A| \leq \kappa$. Entonces $\mathbb{A}$ es una imagen homomórfica (i. e. un cociente) de $Clop(2^\kappa)$.*

Demostración: La propiedad universal del álgebra libre afirma que existe un único homomorfismo $g : Clop(2^\kappa) \to A$ tal que $f = g \circ e$. Si f va de κ sobre A entonces g es el epimorfismo buscado. $\square$

Teorema 4.7. *Si X es un espacio booleano de peso κ entonces X es homeomorfo a algún subespacio cerrado de 2^κ.*

Demostración: Si el peso de X es κ es fácil ver que $|Clop(X)| = \kappa$, pues cualquier función que para cada $U \in Clop(X)$, elija un subconjunto finito B de una base $\mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup B$, es necesariamente inyectiva, y tales funciones existen por la compacidad de X. Por el teorema anterior, $Clop(X)$ es una imagen homomórfica de $Clop(2^\kappa)$, digamos bajo el epimorfismo g. En consecuencia $g^d : Ult(Clop(X)) \to Ult(Clop(2^\kappa))$ es una función continua e inyectiva. Como ambos, dominio y contradominio de g^d son compactos, g^d es un encaje y su imagen es un subconjunto cerrado de $Ult(2^\kappa)$. Pero $Ult(Clop(X)) \cong X$ y $Ult(Clop(2^\kappa)) \cong 2^\kappa$, por tanto, X es homeomorfo a un subespacio cerrado de 2^κ. $\square$

4.3. Álgebras sin átomos numerables y el espacio de Cantor $2^{\aleph_0}$. Se dice que una álgebra booleana es *sin átomos* si ésta no tiene átomos, es decir, para cada $a \in A^+$ existe $b \in A^+$ tal que $b < a$. Ejemplos de álgebras sin átomos son las álgebras libres infinitas. Veremos que en el caso numerable, las álgebras libres coinciden con las álgebras sin átomos.

Se dice que una álgebra booleana $\mathbb{A}$ es *densa en sí misma* si para cualesquiera $a, b \in A$ con $a < b$ existe $c \in A$ tal que $a < c < b$. Es inmediato que una álgebra densa en sí misma es sin átomos, pero más aún:

LEMA 4.1. *Si $\mathbb{A}$ es una álgebra booleana sin átomos entonces $\mathbb{A}$ es densa en sí misma.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $a, b \in A$ con $a < b$. De este modo, $b \nleq a$. Por tanto, $b \wedge a^c \neq 0$. Tomemos $d \in A^+$ tal que $d < b \wedge a^c$, lo cual es posible porque $\mathbb{A}$ es sin átomos. Así $b \wedge a^c \nleq d$ y por tanto, $b \wedge a^c \wedge d^c \neq 0$. La desigualdad $0 < d < b \wedge a^c$ implica $a \leq a \vee d \leq b$. Además, si $a \vee d \leq a$ entonces $d \leq a$, y como $d \leq a^c$, tendríamos que $d = 0$ lo cual es una contradicción. Por otro lado, si tuviesemos $b \leq a \vee d$ entonces $0 = b \wedge (a \vee d)^c = b \wedge a^c \wedge d^c$ lo cual también es una contradicción. En consecuencia, $a < a \vee d < b$. □

El caso particular de álgebras numerables sin átomos es de verdad muy particular, como lo muestra el siguiente resultado.

TEOREMA 4.8. *Cualesquiera dos álgebras booleanas numerables sin átomos son isomorfas.*

DEMOSTRACIÓN: Demostraremos que toda álgebra booleana numerable sin átomos es libre, para lo cual construiremos un conjunto numerable de generadores. Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana numerable. Nos auxiliaremos de una función $h : A^+ \to A^+$ que cumpla que $h(a) < a$ para todo $a \in A^+$ y de una enumeración $A = \{a_n : n \in \omega\}$, con $0_{\mathbb{A}} = a_0$ y $1_{\mathbb{A}} = a_1$. Definamos recursivamente una sucesión $\{b_n : n < \omega\}$ de elementos de A y una sucesión creciente $\{A_n : n < \omega\}$ de subálgebras finitas (y por tanto atómicas) de A de modo tal que $b_0 = a_2$, A_n es la subálgebra de A generada por $\{b_0, \ldots, b_n\}$ y b_{n+1} es el supremo del conjunto $\{b(c) : c \in At(A_n)\}$, donde para cada átomo c de A_n se define

$$b(c) = \begin{cases} a_{n+3} \wedge c & \text{si } a_{n+3} \wedge c \neq 0 \neq a_{n+3}^c \wedge c, \\ h(c) & \text{si no.} \end{cases}$$

Por definición, cada b_n es independiente de los b_j anteriores, y en consecuencia la familia $\{b_n : n < \omega\}$ es independiante. Además, para cada $n \geq 2$, a_n está en A_{n-2}, lo cual es evidente para $n = 2$, mientras que para $n \geq 3$, haciendo $k = n - 3$, podemos escribir

$$a_n = a_{k+3} =$$

$$\sup\{b_{k+1} \wedge c : c \in At(A_k) \text{ y } a_{k+3} \wedge c \neq 0 \neq a_{k+3}^c \wedge c\} \vee \sup\{c \in At(A_k) : c \leq a_{k+3}\}.$$

Por tanto, $A = \bigcup A_n$, es decir, la familia de los b_n genera a A. □

Probablemente al lector se le antojaría generalizar este resultado a cualquier cardinal κ infinito. En la siguiente subsección se dará un ejemplo que muestra la falsedad de tal generalización.

Ahora examinemos los espacios de Stone de las álgebras sin átomos numerables. Como sólo hay una y ésta corresponde al álgebra libre de cardinalidad $\aleph_0$, su espacio de Stone es el espacio de Cantor 2^ω. Recordemos que los átomos en las álgebras boolenas se corresponden con los puntos aislados de sus espacios se Stone, así que en general, el espacio de Stone de cualquier álgebra es perfecto si y sólo si el álgebra es sin átomos. Recordemos además que la familia $s[A]$ es una base para $Ult(\mathbb{A})$, así que $\mathbb{A}$ es numerable si y sólo si $Ult(\mathbb{A})$ tiene una base numerable. De este modo, si $\mathbb{A}$ es una álgebra booleana numerable y sin átomos entonces $Ult(\mathbb{A})$ es un espacio booleano, perfecto y segundo numerable. El teorema de la dualidad de Stone garantiza el siguiente corolario:

COROLARIO 4.1. *Cualesquiera dos espacios booleanos perfectos y segundo numerables son homeomorfos, es decir, el espacio de Cantor $2^{\aleph_0}$ es el único (salvo homeomorfismo) espacio booleano perfecto y segundo numerable.*

4.4. Álgebras σ-centradas y espacios separables. Una álgebra booleana $\mathbb{A}$ es *σ-centrada* si existe una familia numerable $\mathcal{F}$ de filtros sobre $\mathbb{A}$ tal que $A^+ = \bigcup \mathcal{F}$. Es sencillo ver que una álgebra $\mathbb{A}$ es σ-centrada si y sólo si existe una familia numerable $\mathcal{U}$ de ultrafiltros sobre $\mathbb{A}$ tales que $A^+ = \bigcup \mathcal{U}$

Un subconjunto D de un espacio topológico X es *denso* en X si para cada subconjunto abierto no vacío V de X, $D \cap V \neq \emptyset$. Es sencillo ver que D es denso en X si y sólo si para cualquier abierto básico U de X, $U \cap D \neq \emptyset$. Un espacio topológico X es *separable* si existe un subconjunto D de X denso numerable.

Veremos que la propiedad dual de la σ-centralidad de las álgebras booleanas es la separabilidad de los espacios booleanos.

TEOREMA 4.9. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $D \subseteq Ult(\mathbb{A})$. Son equivalentes:*
- $\bigcup D = A^+$
- *D es un subconjunto denso en $Ult(\mathbb{A})$.*

DEMOSTRACIÓN: D es denso en $Ult(\mathbb{A})$ si y sólo si D intersecta a todos los abiertos básicos de $Ult(\mathbb{A})$, es decir, D intersecta a todos los conjuntos de la forma $s(a)$ con $a \in A^+$. Esto equivale a que para cada $a \in A^+$ existe $p \in D$ tal que $a \in p$. $\square$

Se define la *densidad* de un espacio topológico X como el mínimo cardinal κ tal que X tiene un subconjunto denso D de cardinalidad κ. El siguiente corolario se sigue inmediatamente del teorema anterior

COROLARIO 4.2. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. $Ult(\mathbb{A})$ tiene densidad κ si y sólo si existe una familia $D \subseteq Ult(\mathbb{A})$ de cardinal κ tal que $\cup D = A^+$. En particular $\mathbb{A}$ es σ-centrada si y sólo si $Ult(\mathbb{A})$ es separable.*

EJEMPLO 4.1. *Dos álgebras booleanas sin átomos, de la misma cardianalidad pero no isomorfas. Dos espacios booleanos sin puntos aislados y que tienen el mismo peso, pero no son homeomorfos.*

Se define la *σ-álgebra de Borel* $\mathcal{B}(X)$ de un espacio topológico X como la mínima σ-álgebra de conjuntos $\mathbb{A}$ que contiene a la topología de X. Si $X = I = [0,1]$ entonces los elementos de $\mathcal{B}(I)$ son Lebesgue-medibles. La familia $\mathcal{N}$ de conjuntos de Borel de medida cero forma un ideal en $\mathcal{B}(I)$. Consideremos el álgebra cociente $\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}}$. Ésta álgebra tiene $2^{\aleph_0}$ elementos y no tiene átomos puesto que cualquier conjunto de medida positiva tiene un subconjunto de medida positiva estrictamente menor. Sea $Fr(2^{\aleph_0})$ el álgebra libre sobre $2^{\aleph_0}$. Ésta álgebra también tiene $2^{\aleph_0}$ elementos y también es sin átomos. Usaremos la dualidad de Stone para probar que $\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}}$ y $Fr(2^{\aleph_0})$ no son isomorfas. En primer lugar, veremos que $Fr(2^{\aleph_0})$

es σ centrada y que $\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}}$ no lo es. En **[3]** se puede encontrar una prueba del siguiente

TEOREMA 4.10 (Hewitt-Marczewski-Pondiczery). *Sea κ un cardinal infinito. Sea $\{X_s : s \in S\}$ una familia de a lo más 2^κ espacios topológicos tales que su densidad es menor o igual a κ. Entonces, la densidad del producto $\prod_{s\in S} X_s$ es a lo más κ.*

Tomando $\kappa = \aleph_0$, $S = 2^{\aleph_0}$ y $X_s = 2$ para todo $s \in S$ tenemos satisfechas las hipótesis del teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery. La tesis del mismo garantiza que $\prod_{s\in 2^{\aleph_0}} 2 = 2^{2^{\aleph_0}}$ tiene densidad numerable, en otras palabras, $2^{2^{\aleph_0}}$ es separable. Por tanto, $Fr(2^{\aleph_0})$ es σ-centrada.

Ahora veremos que $\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}}$ no es σ-centrada. Sea $D = \{F_n : n \in \omega\}$ una familia de ultrafiltros en $\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}}$. Sea $\epsilon_n = 2^{-n-1}$. Dado que los F_n son ultrafiltros, en cualquiera de éstos es posible encontrar clases de equivalencia de conjuntos borelianos de medida positiva arbitrariamente pequeña. Elijamos, para cada $n \in \omega$ una clase $[b_n] \in F_n$ tal que $\lambda(b_n) \leq \epsilon_{n+1}$, donde λ es la medida de Lebesgue en $[0,1]$. De este modo, $\lambda(\bigcup_{n\in\omega} b_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \leq 2^{-1}$, por lo que $[0,1] \setminus \bigcup_{n\in\omega} b_n$ tiene medida positiva y su clase de equivalencia no pertenece a F_n para toda $n \in \omega$, así que $\bigcup_{n\in\omega} F_n \neq (\mathcal{B}(\mathbb{R})/_{\mathcal{N}})^+$. De este modo, $\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}}$ no es σ-centrada y en consecuencia $Ult(\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}})$ no es separable.

La separabilidad es una propiedad topológica, es decir, si X y Y son homeomorfos y X es separable entonces Y es separable. De este modo $Ult(Fr(2^\omega)) = 2^{2^{\aleph_0}}$ no es homeomorfo a $Ult(\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}})$, y por la dualidad de Stone, $Fr(2^\omega)$ no es isomorfa a $\mathcal{B}(I)/_{\mathcal{N}}$.

4.5. Familias disjuntas y celularidad. Dos elementos a, b de una álgebra booleana $\mathbb{A}$ son *disjuntos* si $a \wedge b = 0$. Un subconjunto $C \subseteq A^+$ es una *familia disjunta por pares* o *anticadena* en $\mathbb{A}$ si cualesquiera dos elementos distintos de C son disjuntos. Se define la *celularidad* $c(\mathbb{A})$ de una álgebra booleana $\mathbb{A}$ como sigue:

$$c(\mathbb{A}) = \sup\{|X| : X \text{ es una anticadena en } \mathbb{A}\}.$$

Sea κ un cardinal infinito. $\mathbb{A}$ safisface la *κ-condición de cadena* (κ–*cc*) si para cada anticadena X en $\mathbb{A}$, $|X| < \kappa$. $\mathbb{A}$ satisface la condición de cadena contable (*ccc*) si cada anticadena en $\mathbb{A}$ es a lo más numerable.

La celularidad también tiene una interpretación topológica. Una familia C de subconjuntos abiertos de un espacio topológico X es una *familia celular* en X si cualesquiera dos elementos distintos de C son ajenos. Para un espacio topológico X se define la celularidad $c(X)$ como sigue:

$$c(X) = \sup\{|U| : U \text{ es una familia celular en } X\}.$$

Análogamente, X satisface la κ condición de cadena (κ–*cc*) si para cada familia celular C de X, $|C| < \kappa$. X satisface la condición de cadena contable (*ccc*) si cada familia celular en X tiene cardinalidad a lo más numerable.

En primer lugar veremos que el mapeo de Stone $s : A \to Clop(Ult(\mathbb{A}))$ lleva anticadenas en familias celulares y viceversa.

LEMA 4.2. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $C \subset A$. C es una anticadena en $\mathbb{A}$ si y sólo si $s[C]$ es una familia celular en $Ult(\mathbb{A})$.*

Demostración: C es anticadena en $\mathbb{A}$ si y sólo si para cualesquiera $a \neq b \in C$ no existe un ultrafiltro p sobre $\mathbb{A}$ tal que $a, b \in p$, es decir, $s(a) \cap s(b) = \emptyset$. Esto equivale a decir que $s[C]$ es una familia celular en $Ult(\mathbb{A})$. $\square$

Teorema 4.11. *Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y κ un cardinal. $\mathbb{A}$ tiene una anticadena de cardinalidad κ si y sólo si $Ult(X)$ tiene una familia celular de cardinalidad κ.*

Demostración: La primera parte es consecuencia del lema anterior. Sea $C \subseteq Ult(\mathbb{A})$ una familia celular. Como los elementos de C son abiertos, por cada $c \in C$ podemos elegir $a_c \in A$ tal que el abierto básico $s(a_c) \subseteq c$. Claramente $a_c \neq a_{c'}$ si $c \neq c' \in C$. De este modo la famila $\{a_c : c \in C\}$ es una anticadena en $\mathbb{A}$ equipotente con C. $\square$

Corolario 4.3. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. $\mathbb{A}$ satisface la κ–cc si y sólo si $Ult(\mathbb{A})$ satisface la κ–cc.*

La κ*–cc* es una propiedad topológica. Por el teorema de la dualidad de Stone, también tenemos que X es un espacio booleano que satisface la κ*–cc* si y sólo si $Clop(X)$ satisface κ*–cc*.

4.6. Encajes regulares y funciones semiabiertas. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ álgebras booleanas y $f : A \to B$ un monomorfismo. Se dice que f es un *encaje regular* o *encaje completo* si para cada anticadena maximal $C \subseteq A$, la imagen $f[C]$ es también una anticadena maximal en $\mathbb{B}$.

Sean X, Y espacios topológicos y $\phi : X \to Y$ una función. Se dice que ϕ es *semiabierta* si para cada subconjunto abierto V de X, la imagen $\phi[V]$ tiene interior no vacío.

Teorema 4.12. *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ álgebras booleanas. Una función $f : A \to B$ es un encaje regular si y sólo si f^d es continua, suprayectiva y semiabierta.*

Demostración: Si $f : A \to B$ es un encaje regular, podemos suponer que $\mathbb{A}$ es subálgebra de $\mathbb{B}$ y que f es la inclusión de $A \to B$. De este modo, las anticadenas maximales en $\mathbb{A}$ son anticadenas maximales en $\mathbb{B}$ y la función $f^d : Ult(\mathbb{B}) \to Ult(\mathbb{A})$ trabaja como sigue: $f^d(p) = p \cap A$. Verificar que f^d es semiabierta consiste en mostrar que si $b \in B^+$ entonces existe $a \in A^+$ tal que $s_{\mathbb{A}}(a) \subseteq \{p \cap A : p \in s_{\mathbb{B}}(b)\}$, es decir, que la imagen de cualquier abierto básico no vacío de $Ult(\mathbb{B})$ contiene un abierto básico no vacío de $Ult(\mathbb{A})$. Supongamos lo contrario, es decir, existe $b \in B^+$ tal que para cada $a \in A^+$ existe un ultrafiltro q_a en $s_{\mathbb{A}}(a)$ tal que $p \cap A \neq q_a$ para todo $p \in Ult(\mathbb{B})$ con $b \in p$. En otras palabras, para cada $a \in A^+$, q_a es un ultrafiltro en $\mathbb{A}$ que no se puede extender a un ultrafiltro en $\mathbb{B}$ que contenga a b. Si, en efecto, no es posible hacer esta extensión es porque el subconjunto $q_a \cup \{b\}$ de B no tiene la propiedad de intersección finita, para cada $a \in A^+$. Por cada $a \in A^+$, seleccionemos un elemento $x_a \in q_a$ de modo tal que $b \wedge x_a = 0$. Más aún, podemos suponer que cada $x_a \leq a$. Esto es posible dado que q_a está cerrado bajo ínfimos finitos. Por *zornificación*,

$$\mathcal{A} = \{D \subseteq \{x_a : a \in A^+\} : D \text{ es anticadena}\}$$

tiene un maximal M, el cual es una anticadena maximal en A, desde que si $a \in A^+$, el correspondiente $x_a \leq a$ y en consecuencia, $a \wedge m \geq x_a \wedge m \neq 0$ para algún

$m \in M$. Sin embargo, M no es anticadena maximal en $\mathbb{B}$ puesto que $M \cup \{b\}$ es una anticadena en $\mathbb{B}$ que extiende propiamente a M, lo cual es una contradicción.

Para demostrar el converso, supongamos que $f^d : Ult(\mathbb{B}) \to Ult(\mathbb{A})$ es continua, suprayectiva y semiabierta. Sea C una anticadena maximal en $\mathbb{A}$. Claramente, $f[C]$ es una anticadena en $\mathbb{B}$. Sea $b \in B^+ \setminus f[C]$. Veamos que existe $c \in C$ tal que $b \wedge f(c) \neq 0$. El abierto básico $s_{\mathbb{B}}(b)$ de $Ult(s_{\mathbb{B}})$ es no vacío. Como f^d es semiabierta, $f^d[s_{\mathbb{B}}(b)]$ tiene interior no vacío, así que existe $a \in A^+$ tal que el abierto básico $s_{\mathbb{A}}(a)$ está contenido en $f^d[s_{\mathbb{B}}(b)]$. Esto significa que para cada ultrafiltro q de $\mathbb{A}$ tal que $a \in q$, se tiene que existe $p \in Ult(\mathbb{B})$ tal que $b \in p$ y $q = f^d(p)$. Como C es maximal, debe haber un $c \in C$ tal que $a \wedge c \neq 0$. Sea q un ultrafiltro en $\mathbb{A}$ tal que $a \wedge c \in q$. Por la suprayectividad de f^d, podemos tomar $p \in Ult(\mathbb{B})$ tal que $f^d(p) = q$. De este modo, $b \in p$ y así $b \cap f(c) \neq 0$ puesto que $f(c)$ y b pertenecen al ultrafiltro p. $\square$

4.7. Encajes densos y mapeos irreducibles. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ dos álgebras booleanas. Una función $f : A \to B$ es un *encaje denso* si f es monomorfismo y la imagen $f[A]$ es un subconjunto denso de $\mathbb{B}$.

Sean X y Y espacios topológicos. Una función continua $\phi : X \to Y$ es *irreducible* si es suprayectiva y para cada subconjunto propio cerrado $K \subset X$ la imagen $\phi[K] \neq Y$.

La relación entre encajes densos y mapeos irreducibles está dada por:

TEOREMA 4.13. *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ álgebras booleanas y $f : A \to B$. Entonces f es un encaje denso si y sólo si f^d es continua e irreducible.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, si f es encaje denso, es monomorfismo. De aquí que f^d es continua y suprayectiva. Supongamos que K es un subconjunto propio de $Ult(\mathbb{B})$ cerrado y que $q \in Ult(\mathbb{B}) \setminus K$. Sea $b \in B^+$ tal que q pertenece al abierto básico $s_{\mathbb{B}}(b)$ y $s_{\mathbb{B}}(b) \cap K = \emptyset$. Como f es encaje denso, existe $a \in A^+$ tal que $f(a) \leq b$. Observe que para cada $p \in K$, $a \notin f^d(p)$, pues de lo contrario, habría un $p \in K$ tal que $f(a) \in p$ y en consecuencia, $b \in p$. De este modo, $s_{\mathbb{A}}(a)$ es un abierto no vacío contenido en el complemento de $f[K]$, de donde $f[K] \neq Y$.

Ahora supongamos que f^d es una función continua e irreducible. Por continuidad y suprayectividad, f es monomorfismo. Veamos que $f[A]$ es un subconjunto denso de B. Sea $b \in B^+$. Así, $b^c \neq 1$ y en consecuencia, $s_{\mathbb{B}}(b^c) \neq Ult(\mathbb{B})$. Sea $q \in Ult(\mathbb{A}) \setminus f^d[s_{\mathbb{B}}(b^c)]$. De este modo, existe $a \in A^+$ tal que el abierto básico $s_{\mathbb{A}}(a)$ es una vecindad de q ajena con $f^d[s_{\mathbb{B}}(b^c)]$. Esto quiere decir que para cada ultrafiltro $p \in Ult(\mathbb{B})$, $b^c \in p$ implica $f(a) \notin p$, lo cual implica que el conjunto $\{b^c, f(a)\}$ no tiene la pif, es decir, $f(a) \wedge b^c = 0$. Pero esto equivale a $f(a) \leq b$. Así queda probado que $f[A]$ es un subconjunto denso de B. $\square$

4.8. Completud y disconexidad. Un espacio topológico X es *extremadamente disconexo* si la cerradura de cualquier conjunto abierto en X es abierto en X. Se dice que X es *básicamente disconexo* si la unión de cualquier familia numerable de cerrado-abiertos en X tiene cerradura abierta.

LEMA 4.3. *Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $M \subseteq A$. Entonces $\bigvee M$ existe en A si y sólo si la cerradura de $\bigcup s[M]$ es abierta en $Ult(\mathbb{A})$.*

DEMOSTRACIÓN: M tiene mínima cota superior si y sólo si $s[M]$ tiene mínima cota superior en el álgebra isomorfa $Clop(Ult(\mathbb{A}))$. Sea C la cerradura de $\bigcup s[M]$. C es el mínimo cerrado que contiene a todos los $s(m)$ con $m \in M$. Si C es abierto en $Ult(\mathbb{A})$ entonces C es la mínima cota superior de $s[M]$. Conversamente, supongamos que existe $C' \in Ult(\mathbb{A})$ que es la mínima cota superior de $s[M]$. Entonces, $\bigcup s[M] \subseteq C'$ y así $C \subseteq C'$. Veremos que $C = C'$. Supongamos lo contrario. De este modo, $C' \setminus C$ es un abierto no vacío. Por tanto existe un cerrado-abierto no vacío D tal que $D \subseteq C' \setminus C$. De este modo, $C' \setminus D$ es una cota superior de $s[M]$ estrictamente menor que C', lo cual contradice la minimalidad de C'. Así pues, C resulta ser cerrado y abierto. □

TEOREMA 4.14. *Una álgebra booleana $\mathbb{A}$ es κ-completa si y sólo si la unión de cualquier familia de cerrado-abiertos con a lo más κ elementos tiene cerradura abierta.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que una familia M de κ elementos de A define a la familia $s[M]$ de κ cerrados y abiertos en $Ult(\mathbb{A})$. Por el lema anterior tenemos el resultado. □

COROLARIO 4.4. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. Entonces $\mathbb{A}$ es completa si y sólo si $Ult(\mathbb{A})$ es extremadamente disconexo. Además $\mathbb{A}$ es σ-completa si y sólo si $Ult(\mathbb{A})$ es básicamente disconexo.*

4.9. El Teorema de Rasiowa-Sikorski y el Teorema de Baire. La construcción de modelos genéricos para las pruebas de consistencia relativa en teoría de conjuntos (mejor conocida como *forcing*) tiene una pieza fundamental en el siguiente teorema

TEOREMA 4.15. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y $\mathcal{D}$ una familia numerable de subconjuntos densos de A. Existe un filtro F en $\mathbb{A}$ tal que $F \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathcal{D}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{D_n : n \in \omega\}$ una enumeración de $\mathcal{D}$. Sin perder generalidad podemos suponer que para cada D_n, $0 \notin D_n$. Construiremos una sucesión $\{a_n : n \in \omega\}$ en A^+ del siguiente modo. Sea $a_0 \in D_0$ y elijamos $a_{n+1} \in D_{n+1}$ tal que $a_{n+1} \leq a_n$. Esto es posible puesto que cada D_n es denso. Ahora bien, la sucesión $\{a_n : n \in \omega\}$ tiene la pif. Sea F un filtro que extienda a $\{a_n : n \in \omega\}$. Claramente $a_n \in F \cap D_n$, lo cual prueba que $F \cap D_n \neq \emptyset$. □

Una consecuencia del teorema anterior es el Teorema de la Categoría de Baire, para espacios booleanos.

TEOREMA 4.16 (Baire). *Sean X es un espacio booleano y $\{D_n : n \in \omega\}$ una familia numerable de subconjuntos abiertos y densos de X. Entonces $\bigcap_{n\in\omega} D_n$ es denso en X.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que $\bigcap_{n\in\omega} D_n$ intersecta a todo abierto básico no vacío de X. Sea $K \in Clop(X)$ no vacío. Como D_n es denso, $K \cap D_n$ es abierto, no vacío y denso en K. Para cada $n \in \omega$, sea $\mathcal{E}_n = \{G \in Clop(K) \setminus \{\emptyset\} : G \subseteq K \cap D_n\}$. $\mathcal{E}_n$ es denso en el álgebra $Clop(K)$, pues si $L \in Clop(K)$ es no vacío entonces $L \cap (K \cap D_n) \neq \emptyset$. Como los tres son abiertos, $L \cap K \cap D_n$ es abierto, y en consecuencia, cualquier básico no vacío $J \subseteq L \cap K \cap D_n$ testifica que $\mathcal{E}_n$ tiene un elemento menor o igual que L. Por el teorema anterior, podemos hallar un filtro $\mathcal{F}$ en $Clop(K)$ tal que para cada $n \in \omega$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{E}_n \neq \emptyset$. $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos cerrados de K con la pif. Como K es compacto, $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Si $x \in \bigcap \mathcal{F}$ entonces

$x \in K$ y para cada $n \in \omega$, $x \in G_n$ para algún $G_n \in \mathcal{E}_n$. Pero cada $G_n \subseteq D_n$, así que $x \in \cap D_n$, lo cual prueba que $K \cap \bigcap_{n\in\omega} D_n \neq \emptyset$. □

Por último demostraremos el siguiente teorema, pero antes algunas definiciones. Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana, p un ultrafiltro en $\mathbb{A}$ y $M \subseteq A$, tal que $\vee M \in A$. Se dice que *p preserva el supremo de M* si $\vee M \in p$ implica $M \cap p \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{M}$ una familia de subconjuntos de A tales que para cada $M \in \mathcal{M}$, $\vee M \in A$. Se dice que *p preserva los supremos de* $\mathcal{M}$ si preserva el supremo de M para todo $M \in \mathcal{M}$. De la manera dual obvia se define cuándo un ultrafiltro preserva los ínfimos de un conjunto o de una familia de conjuntos.

TEOREMA 4.17 (Rasiowa-Sikorski). *Sean $\mathbb{A}$ una álgebra booleana, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ familias numerables de subconjuntos de A tales que $\vee M \in A$ para toda $M \in \mathcal{M}$ y $\wedge N \in A$ para toda $N \in \mathcal{N}$. Entonces existe un ultrafiltro p en $\mathbb{A}$ tal que p preserva los supremos de $\mathcal{M}$ y los ínfimos de $\mathcal{N}$.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar observemos que por leyes de De Morgan, la preservación de ínfimos se reduce a preservación de supremos, es decir, un ultrafiltro p preserva los ínfimos de $\mathcal{N}$ si y sólo si preserva los supremos de $\{N' : n \in \mathcal{N}\}$, donde $N' = \{a^c : a \in N\}$. Enumeremos $\mathcal{M} = \{M_n : n \in \omega\}$ y para cada $n \in \omega$, definamos

$$D_n = \{a \in A^+ : (\exists m \in M_n)(a \leq m) \text{ o } a \wedge (\vee M_n) = 0\}$$

Veamos que D_n es denso, por casos. Si existe $m \in M_n$ tal que $b \wedge m \neq 0$, tenemos que $b \wedge m \in D_n$ y $b \wedge m \leq b$. Si para todo $m \in M_n$, $b \wedge m = 0$ entonces $0 = b \wedge (\vee M_n)$, (si esto no fuera cierto, entonces $b^c \wedge (\vee M_n)$ sería una cota superior para M_n estrictamente menor que $\vee M_n$). Esto prueba que $b \in D_n$. Por el teorema 4.15, existe un filtro F en $\mathbb{A}$ tal que para cada $n \in \omega$, $F \cap D_n \neq \emptyset$. Sea p un ultrafiltro sobre $\mathbb{A}$ tal que $F \subseteq p$. Claramente, $p \cap D_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \omega$. Veamos que p preserva el supremo de M_n. Supongamos que $\vee M_n \in p$. Así, no existe $a \in p$ tal que $a \wedge (\vee M_n) = 0$, y en consecuencia, si $a \in p \cap D_n$ entonces existe $m \in M_n$ tal que $a \leq m$. Como $a \in p$, tenemos que $m \in p$, lo cual prueba que $p \cap M_n \neq \emptyset$. □

5. Prospectiva

Más allá del presente trabajo quedan algunos aspectos dignos de ser estudiados. Varias construcciones básicas como los productos (finitos e infinitos con diferentes soportes) de álgebras booleanas se pueden interpretar en los espacios booleanos, y al revés, construcciones topológicas se pueden reinterpretar en cuanto a las álgebras booleanas. Un ejemplo puede ser la retícula de compactificaciones de un espacio cerodimensional y Hausdorff.

Hemos presentado una sola familia de ejemplos de álgebras atómicas y sus espacios duales, a saber, las álgebras finito-cofinitas sobre un conjunto X de cardinalidad κ, y vimos que estas son las álgebras características de compactaciones de espacios discretos, a saber, la compactación por un punto del espacio discreto de cardinalidad κ. ¿Qué hay del resto de las compactificaciones del espacio discreto de cardinalidad κ? La más notable de todas ellas es precisamente la compactación de Stone-Čech $\beta\mathbb{X}$, la cual es maximal en el orden usual de la retícula de compactificaciones que no definiremos aquí, y que es el espacio de Stone de la álgebra potencia $\mathcal{P}(X)$. Parece claro que la retícula de compactificaciones de un espacio discreto se corresponde con la retícula de álgebras intermedias entre la finito-cofinita y la potencia de κ, lo cual fue establecido recientemente por Steven R. Givant en [**4**], como consecuencia de lo que en ese texto se llama *dualidad híbrida*.

En general resultan interesantes las propiedades de orden que pudieran tener diversas clases de álgebras booleanas y probablemente sobre estas propiedades hay mejor entendimiento desde la topología general, específicamente, desde la teoría de las retículas de compactificaciones de diferentes espacios, o de diferentes familias de espacios topológicos. Por ejemplo, el espacio de Cantor es el dual de la única álgebra booleana sin átomos numerable. Sin embargo, para cualquier cardinal no-numerable κ, existen más que una álgebras booleanas sin átomos de cardinalidad κ. ¿Cómo se comparan éstas con respecto al álgebra libre sobre κ generadores? ¿Cómo luce la retícula (si lo es) de compactificaciones de espacios sin puntos aislados con cardinalidad κ?

Agradecimientos. Agradecemos al Profesor Michael Hrušák por su contribución al presente trabajo, habiéndolo dirigido al ser presentado por el segundo autor como tesina para obtener el grado de maestro en 2006.

Referencias

[1] J. L. Bell and A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts*. North Holland Publishing Co. Amsterdam, 1971.

[2] G. Boole, *An Investigation of the Laws of Thought*, 1854.

[3] R. Engelking. *General Topology* Second edition. Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[4] S. R. Givant, *Duality theories for Boolean algebras with operators*, Springer Monographs in Mathematics, 2014.

[5] E. V. Huntington, *Sets of independent postulates for the algebra of logic*, Trans. Amer. Math. Soc. **5**, (1904), 228–309.

[6] S. Koppelberg, *Handbook of Boolean Algebras*, North Holland, Amsterdam, 1989.

[7] E. Post, *Introduction to a general theory of elementary propositions*, Amer. J. Math., **43** (1921), 163–185.

[8] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The mathematics of metamathematics*. Pantswowe Wydawnictwo Naukowe, Varsovia, Tercera Edición, 1970

[9] H. M. Scheffer, *A set of five independent postulates for Boolean algebras with aplication to logical constants*. Trans. Amer. Math. Soc. **14**, (1913), 481–488.

[10] M. H. Stone, *The theory of representations for Boolean Algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 37–11.

[11] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.

Correos electrónicos: `hernandez.hernandez@gmail.com` (Fernando Hernández-Hernández), `dmezaalcantara@gmail.com` (David Meza-Alcántara).