Curso de topología
Un enfoque conjuntista

Fernando Hernández Hernández

aportacionesmatemáticas
textos
00

Curso de topología

Un enfoque conjuntista

aportaciones**matemáticas**

Aportaciones Matemáticas
Textos

Curso de topología
Un enfoque conjuntista

Fernando Hernández Hernández

aportaciones**matemáticas**

Instituto de Matemáticas UNAM

Ciudad de México, 2021

Catalogación en la publicación UNAM. Dirección General de Bibliotecas
Nombres: Hernández Hernández, Fernando, autor.
Título: Curso de topología: un enfoque conjuntista / Fernando Hernández Hernández.
Descripción: 1a. edición. | Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Matemáticas, 2021. | Serie: Aportaciones matemáticas. Serie textos; núm. 43.
Identificadores: LIBRUNAM 2107826 | ISBN 9786073048767.
Temas: Topología – Estudio y enseñanza (Superior). | Topología – Problemas, ejercicios, etc.
Clasificación: LCC QA611.17.H47 2021 | DDC 514.071—dc23

Autor:
Fernando Hernández Hernández
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
Avenida Francisco J. Múgica s/n, Ciudad Universitaria,
58030, Morelia, Michoacán.

1a. Edición, 2021
Colección *Aportaciones matemáticas*, Serie *Textos*, Núm. 43
Fecha de edición: julio de 2021

ISBN: 978-607-02-8771-8 (Colección Aportaciones matemáticas)
ISBN: 978-607-30-4876-7 (Curso de topología. Un enfoque conjuntista)

Edición:
Instituto de Matemáticas, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, Ciudad de México

Aportaciones matemáticas es una publicación del Instituto de Matemáticas.
Su serie **Textos** comprende libros de texto de matemáticas y sus aplicaciones, para la licenciatura y el posgrado en matemáticas y en otras disciplinas. Se divide en tres niveles:

- Nivel elemental, dirigido a estudiantes de los primeros dos años de la licenciatura.
- Nivel medio, dirigido a estudiantes de los dos últimos años de la licenciatura.
- Nivel avanzado, dirigido a estudiantes de posgrado.

La colección **Aportaciones matemáticas** inició en el año 1985, y su serie **Textos** arrancó en 1993. En el año 2017 el Instituto Nacional del Derecho de Autor (Indautor) solicitó una actualización de los aspectos legales, proceso que implicó el inicio de una nueva temporada para la colección; esta coyuntura favoreció el que se pudiese mejorar el formato de la colección y su presentación. Las reediciones de la serie **Textos** aparecidas a partir de esa fecha fueron entonces consideradas por Indautor como primeras ediciones, independientemente de que del número 1 al 39 de los títulos de esta serie hubiesen aparecido con anterioridad.

En apego a los lineamientos del Indautor, no pueden ponerse indicaciones del tipo «nueva temporada» en la página legal. Esto implica que las reediciones de títulos anteriores pueden contener prefacios, prólogos y otras referencias a ediciones previas; esto no les resta ninguna validez. Los libros de la serie **Textos** del número 40 en adelante aparecen de origen bajo esta nueva temporada de **Aportaciones matemáticas**.

Curso de topología. Un enfoque conjuntista, de Fernando Hernández es un texto de nivel medio.

Curso de topología. Un enfoque conjuntista ofrece el material clásico contenido en casi cualquier libro de texto para la materia; sin embargo, en este volumen se hace más bien con un enfoque conjuntista y se pone mucho énfasis en los métodos aplicados para obtener los resultados presentados. Otra característica que hace a este libro diferente son los múltiples ejemplos presentados que muestran aspectos pocas veces tratados en la mayoría de los textos. Además, cada capítulo es acompañado por una elevada cantidad de ejercicios divididos en dos grupos. El grupo de *Ejercicios adicionales* está dirigido a los estudiantes más experimentados; algunos de estos ejercicios tienen una dificultad más allá de la cotidianidad.

El libro puede usarse para licenciatura (pregrado) o para posgrado. En un curso de posgrado es posible cubrir prácticamente todos los temas presentados. En un curso de licenciatura el profesor puede elegir qué temas presentar de acuerdo con los intereses del auditorio. En el prefacio se sugiere qué temas deberían cubrirse en opinión del autor.

El estudiante que realice la mayoría de los ejercicios puede confiar en que estará preparado para aprobar los exámenes calificativos de la mayoría de las universidades. Parte del entrenamiento es aprender a reconocer qué ejercicios pueden resolverse de manera autónoma y para cuáles es importante solicitar ayuda u orientación.

A mis padres en su aniversario
50: sus bodas de oro

Índice general

Prefacio

En otros libros en que el autor ha participado queda claro el objetivo de escribir un nuevo libro sobre la teoría expuesta y en este es menos claro después de conocer un libro como el de R. Engelking [En] que lo tiene todo y con una precisión asombrosa. Sin embargo, es un texto que tiene demasiada información, y puede ser abrumador en un primer acercamiento a la topología general. Se espera que en este volumen el estudiante encuentre lo más esencial que se requiere para desarrollarse en el campo de la topología general o para tener una buena formación topológica y dedicarse a otras disciplinas en las que el conocimiento topológico sea importante. Este libro tiene su génesis en los cursos que el autor ha impartido tanto a nivel licenciatura (pregrado) como a nivel posgrado en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, UMSNH, y en la Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM.

Hay excelentes libros de texto y de niveles muy variados; algunos que sirvieron para conformar este volumen están en la bibliografía. Todos los resultados que aquí se presentan aparecen en uno u otro de los libros listados. Se han realizado pequeños cambios en las demostraciones al igual que en la manera de presentar todos esos resultados. Quizás lo más especial de este texto es la inclusión de algunos ejemplos que en muchos otros textos no presentan.

Este volumen está inicialmente pensado para un curso de un semestre para estudiantes de maestría. Para ellos es posible cubrir prácticamente todo el material. Los estudiantes que resuelvan la mayoría de los ejercicios, podrán sentirse seguros de estar preparados para presentar exámenes pre doctorales en la mayoría de las universidades. Para estudiantes jóvenes (de pre grado) este volumen puede presentar un buen reto, con la ayuda de un profesor podrán tener un excelente curso que los hará crecer mucho.

En un curso de posgrado se puede estudiar la gran mayoría de los resultados presentados. Para un curso de licenciatura se recomiendan en su totalidad los primeros cinco capítulos, del Capítulo 6 las secciones primera y tercera son muy importantes, del Capítulo 8 las dos primeras secciones. El séptimo capítulo trata sobre el esencial concepto de compacidad; de la primera sección se debería estudiar hasta el Ejemplo 7.17, la Sección 7.2 es fundamental por las diversas aplicaciones, de la tercera sección es valioso estudiar hasta el Ejemplo 7.36; las dos últimas secciones de ese capítulo sí deberían estudiarse completas.

Cada capítulo se acompaña de una serie de ejercicios, generalmente agrupados en dos secciones. Los Ejercicios Adicionales están pensados para los estudiantes más experimentados. El estudiante joven, debería resolver todos los ejercicios de los primeros grupos que básicamente están dirigidos a ellos; aunque también es deseable que exploren los Ejercicios Adicionales. Es muy recomendable que el propio estudiante ataque por sí mismo la mayoría de ejercicios y no menos importante que aprenda a reconocer qué ejercicios deberá resolver con ayuda de sus compañeros o de algún profesor. Eso también es parte central del entrenamiento. En los ejercicios se incluyen otros conceptos que no son tratados en el desarrollo del texto pero que se consideran valiosos. Casi todos los ejercicios están o bien en forma de afirmaciones o son preguntas. En el trabajo diario de un matemático; es decir, cuando se leen otras fuentes uno siempre debe estar demostrando las afirmaciones que los autores realizan o preguntándose hasta qué punto las cosas pueden cambiar si se alteran las hipótesis. Alguien recomendó poner algún símbolo que indicara los ejercicios más difíciles; no se siguió esa recomendación porque seguramente se etiquetarían de forma errónea. En fin, siempre hay un canal abierto en fernando.hernandez@umich.mx para preguntar sobre sugerencias para algún ejercicio en particular.

También la mayoría de los ejemplos provistos en el texto son ejercicios, muchos muy simples otros no tanto; aquellos en los que el autor no fue capaz de escribir una buena guía de cómo resolverse se exponen con más amplitud, sin que dejen de ser ejercicios. Siempre se dejan afirmaciones “al aire” que ayudarán a los lectores a adquirir destreza. Durante todo el texto se trata de resaltar los métodos que llevan a la obtención del resultado más que los resultados mismos.

Agradezco a la UMSNH por permitirme realizar tareas como esta que llevó a la creación de este libro y a la plataforma de Overleaf que me dio la oportunidad de escribir este texto en línea y de manera gratuita; a J. Ahtziri González Lemus quien me hizo muchas observaciones en una primera versión, al Prof. Manuel Ibarra Contreras que realizó una revisión muy detallada de una de las primeras versiones del libro, a Bernardo Tapia que observó muchos errores sutiles y sugirió cambios que mejoraron la presentación, a Reynaldo Rojas Hernández, por arriesgarse a usar el libro en su primer curso de maestría. Agradezco también a sus estudiantes y a todos los estudiantes que de una u otra manera han colaborado en la elaboración de este material.

Un agradecimiento muy especial al incógnito árbitro de esta publicación por detectar errores y omisiones, además de realizar excelentes recomendaciones; sin duda, su dedicado trabajo ha elevado en gran medida la presentación ofrecida. Tampoco está

de más agradecer al Comité Editorial de Aportaciones Matemáticas que ha trabajado mucho para hacer esto posible.

Ojalá los malos ratos que he causado a mi esposa, a mis hijas, a mis amigos, al crear estas páginas se vean transformados en pequeños gozos cuando algún lector recorra una de las páginas aquí contenidas.

Fernando Hernández Hernández
Noviembre 2018

1
Introducción

Los símbolos usados en el texto son en su mayoría estándar. $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales, $\mathbb{Q}$ el de los números racionales, $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Ocasionalmente se usa $\mathbb{N}$ para el conjunto de los números naturales (o sea, los enteros no negativos); los números naturales serán denotados más comúnmente por la letra griega omega, ω, y siempre se les piensa como el primer ordinal infinito. Aunque es recomendable tener conocimientos de teoría de conjuntos no es absolutamente necesario. Por ejemplo, no hay necesidad de ir a buscar qué es un número ordinal. Algunas nociones que sí se considera importante aclarar están en este capítulo.

Se reserva el uso de (a,b) para denotar intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ (u otro conjunto ordenado lo cual será claro a partir del contexto); o sea, (a,b) es el conjunto de todos los elementos x tales que $a < x < b$. Para denotar al *par ordenado* con primera coordenada a y segunda coordenada b, se prefiere usar $\langle a,b\rangle$. Cuando se consideran conjuntos ordenados se usa la notación de intervalos con las definiciones naturales. Obviamente $\mathbb{R}^n$ representa el espacio euclidiano de dimensión n y

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \|x\| = 1\}.$$

De particular interés es S^2 que es la *esfera unitaria* en $\mathbb{R}^3$. El *disco unitario* en $\mathbb{R}^n$ es el conjunto $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$. Asimismo, $\mathbb{R}^+$ denota el conjunto de reales positivos y $\mathbb{R}^-$ denota al conjunto de reales negativos.

Dado un conjunto X, el *conjunto potencia* de X, o sea, la familia de todos los subconjuntos de X se denota por $\mathscr{P}(X)$. La notación $\subseteq$-*máximo* significa que se considera al elemento máximo con respecto al orden de contención $\subseteq$; la notación también se emplea con otros órdenes.

1.1. Funciones

De entre todas las nociones primarias en matemáticas, el concepto de función figura al inicio de la lista. Es uno de esos que se leen e impactan por lo profundo de su abstracción.

Definición 1.1. Una *función* f es un conjunto de pares ordenados de tal suerte que si $\langle x,a\rangle \in f$ y $\langle x,b\rangle \in f$, entonces $a=b$.

Como ejemplos fáciles se tiene que $\emptyset$ y que $\mathrm{id}_X = \{\langle x,x\rangle : x\in X\}$ son funciones; aquí X es un conjunto no vacío. La función id_X se llama *función identidad* sobre X.

Definición 1.2. El *dominio* de una función f es

$$\mathrm{dom}(f)=\{x:(\exists y)(\langle x,y\rangle\in f)\};$$

mientras que el *rango* de f es

$$\mathrm{ran}(f)=\{y:(\exists x)(\langle x,y\rangle\in f)\}.$$

Si f es una función con $X=\mathrm{dom}(f)$ y Y es un conjunto tal que $\mathrm{ran}(f)\subseteq Y$, entonces se escribe $f:X\to Y$ y, para $x\in X$, se denota por $f(x)$ al único $y\in Y$ tal que $\langle x,y\rangle\in f$. Si $\mathrm{dom}(f)\subseteq X$, entonces se señala $f;X\to Y$ y se interpreta a f como una función parcial de X en Y. Esta es una notación útil en varias circunstancias. Para ejemplificar, considere a la *función característica* de un subconjunto A de un conjunto X, $\chi_A : X\to\{0,1\}$, definida por

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{si } x\in A\\ 0, & \text{si } x\notin A,\end{cases}$$

para cada $x\in X$.

Nociones asociadas a funciones muy importantes en topología son la imagen directa e imagen inversa de subconjuntos. Si $f:X\to Y$ es una función, entonces la *imagen directa* de $A\subseteq X$ es

$$f[A]=\{f(x):x\in A\}$$

y la *imagen inversa* de $B\subseteq Y$ es

$$f^{-1}[B]=\{x\in X:f(x)\in B\}.$$

Observe que se usan paréntesis cuadrados para distinguir la imagen directa o inversa de la evaluación de la función en A.[1]

Si $f:X\to Y$ es una función y $A\subseteq X$, *la restricción* de f a A se denota por $f\restriction A$ y es la función $f\cap(A\times Y)$.

[1] A puede ser tanto elemento del dominio de la función como también subconjunto de él.

2

Espacios topológicos

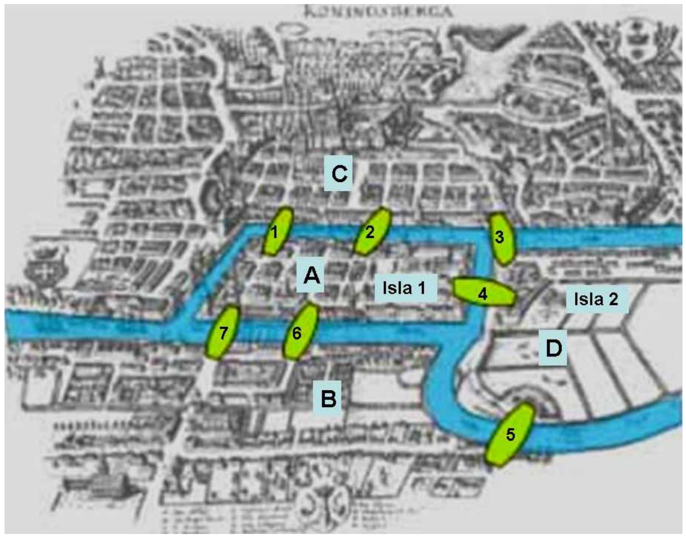
La topología se concentra en estudiar las propiedades de un espacio que se preservan por deformaciones continuas; es decir, deformaciones que preservan de algún modo alguna noción de cercanía de puntos que están próximos entre sí. Intuitivamente se puede imaginar que tales transformaciones son alargar, doblar, torcer, etc. No lo son aquellas deformaciones que introducen cortes.

La topología es una disciplina central en las matemáticas y, como es natural, cada matemático tiene una idea (generalmente correcta) de cuál fue el inicio de esta disciplina. Una que he llegado a creer muy popular es que la topología inició con la idea genitiva de L. Euler para resolver el problema de los puentes de Königsberg. El relato completo puede encontrarse en [Al].

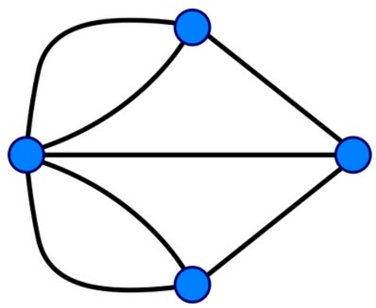
En la ciudad de Kaliningrado, antiguamente llamada Königsberg, el río Pregolya atravesaba la ciudad dividiendo la zona en varias partes. Para no perder la comunicación, la ciudad tenía un sistema de puentes conectores. En total, había siete grandes puentes en Kaliningrado: el puente del herrero, el puente conector, el puente verde, el puente del mercado, el puente de madera, el puente alto y el puente de la miel.

Los ciudadanos se sentían muy orgullosos de esta gran red de comunicación, y entre ellos surgió un pequeño juego para entretenerse en los momentos de aburrimiento. Consistía en una sola pregunta:

¿Se pueden atravesar todos los puentes pasando sólo una vez por cada puente?



El genio matemático L. Euler resolvió el acertijo en 1736. Su mérito fue simplificar la “geometría” del problema usando un diagrama como el siguiente, lo cual permitió que diera una elegante solución.



Cuando estaba en el segundo semestre de la licenciatura en matemáticas, mi profesor de geometría, el Dr. Jesús Pérez Romero, nos dijo que la topología era conocida como la geometría sobre el plano elástico. Creo que, motivado por ese relato sobre los puentes de Königsberg, J. Pérez Romero decía aquello. Quizás por eso el relato siempre lo tuve en mente y me pareció muy importante, tanto que por mucho tiempo lo creí como la idea central de la topología. Fue ya mucho después que comprendí que la topología no estaba hecha de ideas geométricas sino de ideas de cercanía. Sí, en efecto, la verdadera esencia de la topología está en determinar qué puntos se encuentran cerca de un subconjunto dado. Obviamente llegar a ese punto de madurez también requirió de tiempo para comprender qué era lo esencial de las ideas topológicas. Requirió asimismo de la mente de un matemático aventurero en ideas, que rompían paradigmas establecidos como dogmas por más de un milenio. También fue una idea iniciada por G. Cantor. Él consideró que un punto se encuentra cerca de un conjunto si cada vecindad del punto intersecta al subconjunto. Analizó diferentes rangos de cercanía con esa idea y lo llevó a proponer resultados que cambiaron drásticamente el rumbo de todas las matemáticas. Aunque detrás de los pensamientos conjuntistas de G. Cantor estaban brillantes ideas topológicas, él se dedicó más a resolver el problema de la cardinalidad del continuo en lugar de seguir desarrollando la topología que había inventado. Fue un infortunio que a causa de su trabajo persistente también enfermara y su existencia se viera acotada tempranamente.

La idea de G. Cantor captura muy bien la esencia de lo que se necesita de la topología para modelar diversos aspectos del trabajo matemático otorgando un privilegio a la aproximación y, con ello, recuperando todas las ideas geométricas en distintas construcciones.

2.1. Topologías

Definición 2.1. Sea X un conjunto no vacío. Una *topología* sobre X es una familia τ de subconjuntos de X tal que

- $\emptyset,\ X \in \tau$,
- si $\mathscr{U} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup \mathscr{U} \in \tau$,
- si $U,\ V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.

Al par (X, τ) se le llama *espacio topológico*.

Como es costumbre, si la topología τ para el conjunto X es clara a partir del contexto, entonces simplemente se refiere a X como el espacio topológico en cuestión; si, por el contrario hay varias topologías para el conjunto X dentro del contexto, entonces se especifica τ_X. A los elementos de la topología de X se les llama *subconjuntos abiertos* de X. También se dice que un subconjunto F de X es *cerrado* si $X \setminus F$ es un conjunto abierto.

A continuación se presentan varios ejemplos de espacios topológicos. Se deja al lector verificar que, en cada caso, la familia que se indica es, en realidad, una topología.

Ejemplo 2.2. Las dos topologías extremas para un conjunto X son la *topología indiscreta*, $\tau = \{\emptyset,\ X\}$, y la *topología discreta* $\tau = \mathscr{P}(X)$. Éstas coinciden sólo en caso de que $|X| \leq 1$.

3

Continuidad y nuevos espacios

El concepto de continuidad es de los más elementales y por ello se requiere tener una definición capaz de adaptarse a todas las diversas situaciones donde será empleada. La idea central detrás de una función continua es que asocie puntos cercanos del dominio de la función a puntos cercanos en el rango. La capacidad de abstracción de la topología es lo que la hace importante para todas las áreas de las matemáticas.

De ahora en adelante se dirá simplemente "Sea X un espacio" y se obviará la topología que X tenga asociada cuando esta sea clara por el contexto. Naturalmente, si se piensa que puede haber alguna confusión, se especificará cuál es la topología que se está considerando sobre X.

3.1. Funciones continuas

Definición 3.1. Sean X y Y espacios, $x \in X$ y $f : X \to Y$. Se dice que f es *continua en* x si para cada $V \in \mathcal{V}(f(x))$ existe $U \in \mathcal{V}(x)$ tal que $f[U] \subseteq V$.

También se dirá que f es *continua* en X si f es continua en cada punto $x \in X$.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua según la definición de cálculo, entonces f es continua según la Definición 3.1. De hecho, la Definición 3.1 generaliza aquella otra para espacios métricos. Si Y es un espacio indiscreto y X es cualquier espacio; entonces toda $f : X \to Y$ es continua. Si X es un espacio discreto y Y es cualquier espacio, entonces cualquier función $f : X \to Y$ es continua.

Quizás el resultado más importante respecto a las funciones continuas es el siguiente.

Teorema 3.2. *Sean X y Y espacios y $f : X \to Y$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es continua.

(2) $f^{-1}[U]$ *es un subconjunto abierto en* X*, para todo subconjunto abierto* U *de* Y.

(3) $f^{-1}[F]$ *es un subconjunto cerrado en* X*, para todo subconjunto cerrado* F *de* Y.

(4) $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$*, para todo* $A \subseteq X$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $U \subseteq Y$ abierto. Fije $x \in f^{-1}[U]$; como f es continua en x y U es una vecindad de $f(x)$, debe existir $V \in \mathscr{V}(x)$ tal que $f[V] \subseteq U$. Por lo tanto,

$$V \subseteq f^{-1}[f[V]] \subseteq f^{-1}[U].$$

Esto demuestra que $f^{-1}[U]$ es abierto.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $F \subseteq Y$ un subconjunto cerrado. Entonces $Y \setminus F$ es abierto y así $X \setminus f^{-1}[F] = f^{-1}[Y \setminus F]$ es abierto. Por lo tanto, $f^{-1}[F]$ es cerrado.

(3) $\Rightarrow$ (4). Sea $A \subseteq X$. Por (3) $f^{-1}[\overline{f[A]}]$ es un cerrado en X. Se afirma que $A \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$. En efecto, dado que $f[A] \subseteq f[\overline{A}]$, se sigue que

$$A \subseteq f^{-1}[f[A]] \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}].$$

Como $\overline{A}$ es el $\subseteq$-mínimo subconjunto cerrado tal que $A \subseteq \overline{A}$ y $f^{-1}[\overline{f[A]}]$ es cerrado, se sigue que $\overline{A} \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$, o bien que $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Sean $x \in X$ y U es una vecindad de $f(x)$. Supóngase que para cualquier $V \in \mathscr{V}(x)$ se tiene que $f[V] \nsubseteq U$. En otras palabras,

$$(\forall V \in \mathscr{V}(x))\,(f[V] \cap Y \setminus U \neq \emptyset)$$

o bien

$$(\forall V \in \mathscr{V}(x))\,(V \cap f^{-1}[Y \setminus U] \neq \emptyset).$$

Así, $x \in \overline{f^{-1}[Y \setminus U]}$ y, por lo tanto,

$$f(x) \in f[\overline{f^{-1}[Y \setminus U]}] \subseteq \overline{f[f^{-1}[Y \setminus U]]} = \overline{Y \setminus U}.$$

Esto contradice que $f(x) \in \mathring{U}$. ❒

Ejemplo 3.3. Si X es un espacio, sea

$$C(X) = \{f \in \mathbb{R}^X : f \text{ es continua}\}.$$

Si se define (como es usual) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, para $f, g \in C(X)$; entonces $f+g, f \cdot g \in C(X)$.

En efecto, si $x \in X$ y $s < f(x) + g(x) < t$, entonces

$$s - g(x) < f(x) < t - g(x) \qquad \text{y} \qquad s - f(x) < g(x) < t - f(x).$$

4
Conexidad

La idea de espacios conexos es muy básica y es útil en muchas partes de las matemáticas. Intuitivamente, un espacio es conexo si es de una sola pieza. Hay variantes naturales de esa idea y serán exploradas en este capítulo.

4.1. Espacios conexos

De qué manera se podrá expresar en abstracto esa idea de "ser de dos piezas". Primeramente, los puntos que forman una pieza deberían estar lejos de la otra pieza, eso significa que cada uno de esos puntos tiene una vecindad sin intersección con la otra pieza; pero si todos los puntos de esa primera pieza tiene una vecindad con la propiedad entonces todos ellos forman un conjunto abierto sin intersección con la otra pieza. Además, el razonamiento es simétrico.

Definición 4.1. Un espacio X se llama *conexo* si no existen abiertos ajenos y no vacíos U y V tales que $X = U \cup V$. Tales abiertos son una *disconexión* de X.

Un subconjunto A de X se llama conexo si como subespacio es un espacio conexo. La siguiente proposición concentra la lista de las principales propiedades sobre conexidad.

Proposición 4.2. *Sea X un espacio.*

(1) Si la familia $\mathscr{A}$ es de subconjuntos conexos de X y se tiene que $\bigcap \mathscr{A} \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathscr{A}$ es conexo.

(2) Si A es conexo y $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, entonces B es conexo.

(3) Si $A \subseteq X$ es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.

(4) *Considere $p \in X$ y sea $C(p) = \bigcup\{C \subseteq X : p \in C \ \wedge\ C$ es conexo$\}$. Entonces $C(p)$ es el $\subseteq$-máximo conexo contenido en X del que p es un elemento. A este se le llama* componente conexa *de p en X.*

(5) *La familia $\{C(p) : p \in X\}$ forma una partición de X en subconjuntos cerrados y conexos.*

(6) *X es conexo si y sólo si X tiene una única componente conexa.*

Demostración. (1) Sea $Y = \bigcup \mathscr{A}$. Si Y no es conexo, deben existir dos subconjuntos abiertos U y V tales que $Y = (U \cap Y) \cup (V \cap Y)$ con $U \cap Y \neq \emptyset$, $V \cap Y \neq \emptyset$ y $(U \cap V) \cap Y = \emptyset$.

Para $A \in \mathscr{A}$, se tiene que $A \subseteq Y$ y entonces

$$A = Y \cap A = [(U \cap Y) \cup (V \cap Y)] \cap A = (U \cap A) \cup (V \cap A).$$

Por ser A conexo, necesariamente se debe tener que $U \cap A = \emptyset$ o $V \cap A = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $V \cap A = \emptyset$, de lo cual se deduce que $A \subseteq U$.

Como $V \cap Y \neq \emptyset$, existe $B \in \mathscr{A}$ tal que $V \cap B \neq \emptyset$. Nótese que $B \nsubseteq V$ puesto que $A \cap B \neq \emptyset$. Puesto que $A \subseteq U$, se sigue que $B \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto

$$B = (B \cap U) \cup (B \cap V);$$

además de que los conjuntos $(B \cap U)$ y $(B \cap V)$ son una disconexión de B; una contradicción.

(2) Sean $U, V \subseteq X$ abiertos tales que

$$B = (U \cap B) \cup (V \cap B)$$

y $(U \cap B) \cap (V \cap B) = \emptyset$. Puesto que $A \subseteq B$ se tiene que también $A = (U \cap A) \cup (V \cap A)$; pero al ser A conexo se debe tener que $U \cap A = \emptyset$ o $V \cap A = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, $U \cap A = \emptyset$ y así $A \subseteq V$.

Si $B \nsubseteq V$, debe existir $x \in B \setminus V \subseteq U$. Pero $A \cap U = \emptyset$. Esto contradice que $x \in \overline{A}$.

Los restantes puntos son consecuencia directa de estos primeros dos. ❒

Definición 4.3. Un espacio X se llama *totalmente disconexo* si $C(p)$ consta de un solo punto, para cada $p \in X$.

Obviamente el paso a subespacios de espacios conexos no necesariamente preserva la propiedad. La conexidad sí es una propiedad productiva, pero ello requiere de algunos resultados preliminares.

Lema 4.4. *Si X es conexo y $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva, entonces Y es conexo.*

5
Axiomas de separación

Los axiomas para definir un espacio topológico son mínimos y eso permite tener una gran variedad de espacios. Obviamente eso también origina espacios patológicos como el espacio indiscreto en el que cualesquiera dos puntos están "cerca" lo cual no es tan oportuno cuando se trata de "medir" convergencia que es uno de los objetivos de la topología. Este capítulo presenta diferentes grados de separación lo cual permite tener espacios más especializados para desarrollar ciertas tareas.

5.1. Espacios T_0, T_1, T_2 y T_3

Naturalmente hay muchas clasificaciones de espacios topológicos, seguramente inspiradas por las propiedades que se desea sean relevantes. Pese a todas esas geniales invenciones o abstracciones, las clasificaciones de separación son, sin duda alguna, tan importantes que ninguna otra de esas clasificaciones puede dejarlas fuera.

Diferentes aplicaciones topológicas necesitan diferentes grados de distinción. Por ejemplo, es conocido que para algunas aplicaciones computacionales se necesita de espacios que sólo cumplan las dos primeras de las siguientes clasificaciones mientras que para aplicaciones más cercanas al análisis matemático se necesitan de las últimas propiedades de separación que ahora se introducen.

Definición 5.1. Sea X un espacio.

(1) X es un espacio T_0, si dados cualesquiera dos puntos en X, existe un abierto que contiene sólo a uno de ellos.

(2) X es un espacio T_1, si dados cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existen subconjuntos abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \notin U$, $x \notin V$ y $y \in V$.

(3) X es un espacio T_2 o *espacio de Hausdorff* si dados dos puntos $x, y \in X$, existen subconjuntos abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $y \in V$.

(4) X es un espacio T_3 o *espacio regular* si dados $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus F$, existen subconjuntos abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$; además de ser un espacio T_1.

Para empezar hay que observar que $T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ y que para que la primera implicación sea válida es necesario agregar en la definición de T_3 que el axioma T_1 sea también válido. Por ejemplo, si se omite, un espacio indiscreto sería regular sin ser un espacio T_0. Los espacios métricos son regulares como puede fácilmente ser verificado. Antes de pasar a ejemplos un tanto más interesantes se pide al lector que verifique que las siguientes afirmaciones son equivalentes para un espacio (X, τ):

(1) El espacio (X, τ) es T_1.

(2) τ contiene a la topología co-finita.

(3) Todo conjunto finito es cerrado.

Otra cosa importante de recordar es que los espacios T_2 son (quizás) más conocidos como *espacios de Hausdorff*.

Ejemplo 5.2. Sean X un conjunto con al menos dos puntos y $p \in X$.Use la topología del punto particular, $\tau_p = \{U \subseteq X : p \in U\} \cup \{\emptyset\}$. Esta topología es T_0 y no es T_1 porque para $x \in X \setminus \{p\}$ no existe un abierto U tal que $x \in U$ y $p \notin U$.

Ejemplo 5.3. Si X es un conjunto infinito con la topología co-finita, X es un espacio T_1 por las observaciones anteriores, pero no es un espacio de Hausdorff.

Ejemplo 5.4. El espacio del Ejemplo 4.13 es un espacio de Hausdorff que no es regular. ¿Existirá un espacio conexo, regular y numerable?

Proposición 5.5. *Para un espacio X son equivalentes:*

(1) X es de Hausdorff.

(2) $(\forall x \in X)\,(\{x\} = \bigcap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}(x)\})$.

(3) $\Delta = \{\langle x, x\rangle : x \in X\}$ *es un subconjunto cerrado de* $X \times X$.

Demostración. (1)$\Rightarrow$(2) Si $y \in X \setminus \{x\}$, escoja $V \in \mathcal{V}(x)$ y $W \in \mathcal{V}(y)$ tales que $V \cap W = \emptyset$. Entonces $y \notin \overline{V}$ y así $\bigcap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}(x)\} \subseteq \{x\}$.

(2)$\Rightarrow$(3) Suponga que $\langle x, y\rangle \in X \times X \setminus \Delta$, entonces $x \neq y$ y así $y \notin \bigcap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}(x)\}$. Debe existir $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $y \notin \overline{V}$ y en consecuencia hay $W \in \mathcal{V}(y)$ tal que $W \cap V = \emptyset$. Se sigue que $(V \times W) \cap \Delta = \emptyset$. Por lo tanto Δ es cerrado.

6
Convergencia

Por razones obvias, una parte importante del quehacer topológico se centra en estudiar la convergencia. En la práctica, incluso para funciones muy específicas y estudiadas como lo son las funciones trigonométricas o la función logaritmo, no se calculan realmente los valores exactos de dichas funciones para específicos argumentos sino que lo que se hace es dar aproximaciones tan buenas como se quiera para los valores de dichas funciones. En otras palabras, lo que se está haciendo es generar una sucesión de valores aproximados, el límite de esa sucesión es el valor determinado en el cual se está interesado.

En este capítulo se presentan diferentes nociones de convergencia en espacios abstractos.

6.1. Sucesiones convergentes

Se inicia por el modo más simple de las nociones de convergencia, la convergencia de sucesiones. Como se sabe, una sucesión $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ en un espacio X no es otra cosa que una función $x : \omega \to X$ tal que para cada $n \in \omega$, el valor de la función en n se denota por x_n. Algunas veces es conveniente pensar en las sucesiones como listas ordenadas de valores de la función en el conjunto en cuestión. Una *subsucesión* de una sucesión intuitivamente es tomar, en el mismo orden, parte de los términos de la sucesión original; formalmente se considera una función estrictamente creciente $k : \omega \to \omega$ y entonces $x \circ k : \omega \to X$ es una subsucesión de la sucesión $x : \omega \to X$. La subsucesión usualmente se denota por $\langle x_{k_n} : n \in \omega \rangle$.

Definición 6.1. Una sucesión $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ en un espacio X *converge al punto* $x \in X$ si para cada $V \in \mathscr{V}(x)$ se tiene que existe $n_0 \in \omega$ tal que $x_n \in V$ para cada $n \geq n_0$. En tal caso se denota por alguna de las dos siguientes formas:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad x_n \to x.$$

Es decir, una sucesión converge a un punto $x \in X$ si cada vecindad de x contiene a casi todos los términos de la sucesión. Una noción más débil es que cada vecindad de x contenga infinitos puntos de la sucesión.

Definición 6.2. Una sucesión $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ en un espacio X tiene a un punto $x \in X$ como *punto de acumulación* si para cada $V \in \mathscr{V}(x)$ y cada $n \in \omega$ existe $m > n$ tal que $x_m \in V$.

En un espacio discreto, una sucesión converge si y sólo si es finalmente constante; si X es infinito y tiene la topología co-finita, entonces una sucesión inyectiva converge y converge a cualquier punto del espacio. Si X no es numerable y tiene la topología co-numerable, entonces las únicas sucesiones convergentes son las que son finalmente constantes.

Ejemplo 6.3. Sea $A(X)$ el espacio definido en el Ejemplo 3.5; en este espacio, cualquier sucesión inyectiva converge al punto especial $p \in A(X) \setminus X$.

Ejemplo 6.4. El *espacio de Arens*. Sean $p \notin \omega \times \omega$ y $X = \{p\} \cup \omega \times \omega$ con la siguiente topología: Cada punto de $\omega \times \omega$ es un punto aislado y las vecindades que contienen a p son conjuntos U para los cuales existe $k \in \omega$ tal que

$$(\forall m > k)(\{\langle m, n\rangle \notin U : n \in \omega\} \text{ es finito}).$$

Entonces $p \in \overline{\omega \times \omega}$, sin embargo no hay una sucesión de términos en $\omega \times \omega$ que converja a p. ¿Por qué? Otro hecho interesante aquí es que si Y es $\{p\} \cup \omega \times \omega$, pero con la topología discreta, entonces la función identidad $\mathrm{id}_X : X \to Y$ trasforma sucesiones convergentes en sucesiones convergentes al punto correspondiente, pero no es una función continua. ¿Por qué?

Ejemplo 6.5. Si X es un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$, entonces existe una sucesión $\langle a_n : n \in \omega\rangle$ de términos en A que converge a x. En efecto, puesto que para cada $n \in \omega$ se tiene que $A \cap \mathbb{B}(x; {}^1/_{n+1}) \neq \emptyset$, usando el Axioma de Elección, se puede escoger algún elemento de ese conjunto y etiquetarlo como a_n. La sucesión resultante converge a x, como es fácil verificar.

Es pocas veces remarcado que esta propiedad frecuentemente usada en el análisis matemático depende en gran medida del Axioma de Elección. Hay modelos de ZF en los que el Axioma de Elección falla de manera tan mala que en ellos hay contraejemplos de lo anterior. Ver por ejemplo las páginas 147 y 178 del clásico [HR].

7

Espacios compactos y similares

La compacidad es una de las ideas más importantes no sólo dentro de la topología sino fuera de ella. La compacidad a lo largo del tiempo ha cambiado y la definición original de lo que empezó a tomarse como compacidad difiere mucho de la actual definición. La actual definición ya tiene muy oculta la motivación intuitiva de ella; sin embargo, su nivel de abstracción la hace una propiedad poderosa en muchos ámbitos.

Quizás la idea central de la compacidad es que permite trabajar con conjuntos infinitos como si fueran finitos. Por ejemplo, si f es una función con dominio finito y valores reales, es trivial convencerse de que ella es una función acotada; si por el contrario f no tiene dominio finito entonces es difícil pensar que f deba ser acotada, a menos que el dominio sea compacto y ella sea continua. Como este, hay varios otros ejemplos que al poner un ingrediente topológico a una propiedad sobre un compacto adquiere un cierto sentido de finitud. Se refiere al lector que quiera profundizar más en estos aspectos de la compacidad a [Ra].

7.1. Compacidad

Como ya se dijo antes, el concepto de compacidad no nació aunado al concepto de cubiertas, pero sí propició el desarrollo del concepto de cubierta. Una *cubierta* de un conjunto es simplemente una familia de subconjuntos cuya unión es el conjunto en cuestión. Si X es un espacio, una *cubierta abierta* es una familia de subconjuntos abiertos $\mathscr{U}$ de X cuya unión es X. Se denomina *subcubierta* a una subfamilia de la cubierta que es ella misma una cubierta.

Definición 7.1. Sea X un espacio; se dice que X es un espacio *compacto* si para cada cubierta abierta $\mathscr{U}$ del espacio X, existe una familia finita $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{U}$ tal que $X = \bigcup \mathscr{A}$.

Un subconjunto de un espacio X se dice compacto si con la topología de subespacio es un espacio compacto. Es fácil analizar que si dos espacios son homeomorfos ambos son compactos o ambos no son compactos. En efecto, eso es consecuencia de que los homeomorfismos no solamente son biyecciones entre los puntos de los espacios involucrados sino también entre las familias de subconjuntos abiertos de los espacios.

Un espacio indiscreto es compacto mientras que un espacio discreto es compacto si y sólo si es finito. El espacio co-finito es compacto al igual que cualquiera de sus subespacios.

Ejemplo 7.2. Dado un espacio discreto X, el espacio del Ejemplo 3.5, $A(X) = X \cup \{p\}$, donde $p \notin X$ y las vecindades de los $x \in X$ son todos los subconjuntos de $A(X)$ que lo contienen, mientras que las vecindades de p son de la forma $\{p\} \cup X \setminus F$, donde $F \subseteq X$ es finito. Entonces $A(X)$ es compacto y Hausdorff.

De los posibles ejemplos de espacios compactos, el siguiente es sin duda el más importante. Recuerde que dado un conjunto G, por $[G]^{<\omega}$ se denota la familia de subconjuntos finitos de G.

Ejemplo 7.3. $[0,1]$ es compacto. En efecto, sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta del $[0,1]$. Considere

$$A = \{x \in [0,1] : (\exists \mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{<\omega})\,([0,x] \subseteq \bigcup \mathscr{V})\},$$

Obviamente $A \neq \emptyset$; sea $u = \sup A$. Se requiere verificar que $u = 1$. Si $u < 1$ entonces existen $U \in \mathscr{U}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $u \in (u-\varepsilon, u+\varepsilon) \subseteq U$. Por definición de u, existe $a \in A$ tal que $u - \varepsilon < a \leq u$; luego el intervalo $[0,a]$ puede cubrirse con una cantidad finita de elementos de $\mathscr{U}$. Si se elige a' tal que $u < a' < u + \varepsilon$, entonces también el intervalo $[0,a']$ puede cubrirse por una cantidad finita de elementos de $\mathscr{U}$ y en consecuencia $a' \in A$ contradiciendo la elección de u.

Ejemplo 7.4. Todo espacio linealmente ordenado con mínimo y máximo y con la propiedad de la mínima cota superior[1] es compacto. La demostración de esta afirmación es una generalización directa del ejemplo anterior. Los detalles se dejan al lector.

Ejemplo 7.5. El cuadrado lexicográfico, $[0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden, es un espacio compacto. Sólo se necesita demostrar que el cuadrado lexicográfico tiene la propiedad de la mínima cota superior. Si $A \subseteq [0,1] \times [0,1]$ no es vacío, sea x_0 el supremo de la proyección de A en la primera coordenada. Si $A \times \{x_0\} \times [0,1] = \emptyset$, entonces $\langle x_0, 0\rangle = \sup A$. Si no, sea $y_0 = \sup\{y : \langle x_0, y\rangle \in A\}$; entonces $\langle x_0, y_0\rangle = \sup A$.

[1] Un conjunto ordenado tiene la propiedad de la mínima cota superior si cualquier subconjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

8
Axiomas de numerabilidad

En el presente capítulo se estudian las propiedades de numerabilidad de un espacio. Cuando un espacio tiene una base pequeña para su topología (en el sentido de cantidad) es de esperarse encontrar propiedades más adecuadas que en el caso general. Por ejemplo, los espacios métricos tienen bases locales pequeñas y si un espacio X es T_1 y tiene una base numerable, entonces no puede tener una cardinalidad exagerada porque si $\{B_n : n \in \omega\}$ es base para la topología del espacio X, entonces a cada punto x del espacio se puede asignar $\{n \in \omega : x \in B_n\}$. Esta asignación define una inyección; por lo tanto, el espacio no puede tener más puntos que subconjuntos de números naturales.

En el capítulo también se presentan algunos hechos relacionados con espacios separables y se introduce una nueva clase de espacios que si bien en principio no tienen que ver con axiomas de numerabilidad, sí es una clase que extiende a una popular clase definida a partir de este tipo de axiomas.

8.1. Espacios primero y segundo numerables

Como se dijo arriba, las buenas propiedades de un espacio aumentan significativamente cuando se tiene una base pequeña para su topología, ya sea de manera global o local. Quizás la mejor muestra de ello sea el Corolario 9.4; otros indicios aparecerán en esta sección y en las posteriores.

Definición 8.1. Sea X un espacio.

(1) X es un *espacio segundo numerable* si X tiene una base numerable para su topología.

(2) X es *primero numerable* si cada $x \in X$ tiene una base numerable de vecindades.

Por razones obvias, todos los espacios segundo numerables son espacios primero numerables, también son espacios de Lindelöf:

Teorema 8.2 (Lindelöf)**.** *Si X es un espacio segundo numerable, entonces toda cubierta abierta tiene una subcubierta numerable; es decir, es un espacio de Lindelöf.*

Demostración. Sean $\mathscr{B} = \{B_n : n \in \omega\}$ una base numerable para la topología de X y $\mathscr{U}$ una cubierta abierta para X. Fije algún elemento arbitrario $V \in \mathscr{U}$. Para cada $n \in \omega$ escoja $U_n \in \mathscr{U}$ tal que $B_n \subseteq U_n$, si es posible y $U_n = V$ si no.

Entonces $X = \bigcup_{n\in\omega} U_n$ porque si $x \in X$, debe existir algún $U \in \mathscr{U}$ tal que $x \in U$. Como U es abierto, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Entonces alguno de los conjuntos U_n debe contener a x. ❒

También es fácil convencerse de que los subespacios de espacios primero (segundo) numerables son espacios de la misma clase. Populares espacios segundo numerables son $\mathbb{R}$, $[0,1]$, $[0,1]^\omega$, los espacios métricos son espacios primero numerables pero no necesariamente espacios segundo numerables como se puede constatar al considerar a un espacio discreto no numerable.

Ejemplo 8.3. $\mathbb{R}_\ell$, la recta de Sorgenfrey, es un espacio primero numerable pero no segundo numerable. Es fácil ver que $\mathbb{R}_\ell$ es primero numerable; para ver que no es segundo numerable observe que si $\mathscr{B}$ es una base para la topología de $\mathbb{R}_\ell$, entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ debe existir $B_x \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$. Entonces $x \neq y \Rightarrow B_x \neq B_y$, por lo que $|\mathscr{B}| \geq \mathfrak{c}$. ¿Cuál será la mínima cardinalidad de una base para $\mathbb{R}_\ell$?

El Teorema 6.17 caracterizó cuándo un punto está en la clausura de un subconjunto en términos de la convergencia de una red. Para el caso de los espacios primero numerables las sucesiones sí son capaces de hacer esa caracterización.

Proposición 8.4. *Si X es un espacio primero numerable, $A \subseteq X$ y $x \in X$; entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión de términos en A que converge a x.*

La demostración de esta proposición es básicamente la misma que la del Teorema 6.17; si una sucesión de términos en A converge a x, entonces toda vecindad de x atrapa a casi todos los términos de la sucesión y, por lo tanto, debe tener intersección no vacía con A. Recíprocamente escoja una base numerable $\{B_n : n \in \omega\}$ de vecindades para x con la propiedad adicional de que $B_{n+1} \subseteq B_n$, para cada $n \in \omega$. Escogiendo $a_n \in A \cap B_n$, para cada $n \in \omega$, se obtiene una sucesión que converge a x.

Ejemplo 8.5. El espacio de Arens, ver Ejemplo 6.4, es un espacio numerable que no es primero numerable puesto que no hay sucesiones en $\omega \times \omega$ que converjan al punto $p \in \overline{\omega \times \omega}$. ¿Cuál será la mínima cardinalidad de una base de vecindades para p?

Aunque el argumento del ejemplo anterior establece que el espacio de Arens no es primero numerable de manera económica, no permite exponer un método para

9

Metrización y Paracompacidad

Se han presentado resultados que muestran cómo diferentes conceptos se unifican en la clase de los espacio métricos, ejemplo de ello es el Teorema 7.48 que muestra cómo diferentes nociones de compacidad coinciden para espacios métricos. No es de extrañar que se haya hecho un estudio profundo de qué propiedades garantizaban que la topología de un espacio en realidad está dada por una cierta métrica. El primer teorema que garantiza la metrización de un espacio es el Teorema de Urysohn, Corolario 9.4, que fue demostrado alrededor de 1925 en la etapa más joven de la topología. En la década de los años 50 hubo mucha actividad tratando de establecer teoremas importantes que garantizaran la metrización. Se concluyó con los Teoremas de Nagata-Smirnoff y de Bing; pero no sólo se demostraron teoremas de metrización, se plantearon igual otros problemas que generaron un desarrollo impresionante en la topología, la teoría de conjuntos, el análisis. Uno de ello fue la Conjetura del Espacio Normal de Moore, ver (al menos) la introducción de [DTW].

9.1. Metrización

Definición 9.1. Un espacio X se llama *metrizable* si existe una métrica d sobre X que es compatible con la topología de X; es decir, que la topología τ_d coincide con la topología original de X.

Algunos de los espacios más usados en la práctica son espacios metrizables, algunos no. Los espacios discretos son metrizables por la métrica discreta; si un espacio X es metrizable y Y es un subespacio de X, entonces Y también es metrizable. Otra cosa fácil e importante es que si un espacio es metrizable por una métrica d, entonces

$$d' = \frac{d}{1+d} \qquad \text{y} \qquad \text{mín}\{1, d\}$$

también son métricas sobre X que generan la misma topología. Ver Proposición 2.19.

Ejemplo 9.2. Si cada espacio X_n, con $n \in \omega$, es metrizable bajo una métrica d_n, entonces $X = \prod_{n\in\omega} X_n$ también es metrizable. En efecto, sin pérdida de generalidad se puede suponer que d_n es una métrica acotada por 1. Defínase $d : X \times X \to \mathbb{R}$ por

$$d(x,y) = \sum_{n\in\omega} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}.$$

Obviamente d es no negativa, $d(x,y) = d(y,x)$ para cualesquiera $x,y \in X$ y $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Del mismo modo la desigualdad del triángulo, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, es trivialmente cierta.

Sean τ la topología producto sobre X y τ_d la topología que induce la métrica d sobre X. No es difícil ver que $\tau \subseteq \tau_d$. Para demostrar la otra contención considere $\varepsilon > 0$ y bastará con demostrar que $\mathbb{B}(x;\varepsilon)$ es abierto respecto de τ, para cualquier $x \in X$. Sea $n_0 \in \omega$ tal que $\sum_{n_0 \leq n} {}^1/_{2^n} < {}^\varepsilon/_2$. Para $i < n_0$, sea $U_i = \mathbb{B}(x_i; {}^\varepsilon/_{2\cdot n_0})$ y use a

$$W = W(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}; U_0, U_1, U_2, \ldots, U_{n_0}).$$

Si $y \in W$, entonces $y \in \mathbb{B}(x;\varepsilon)$ porque

$$\begin{aligned} d(x,y) = \sum_{n\in\omega} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} &\leq \sum_{i<n_0} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} + \sum_{n\geq n_0} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} \\ &\leq \sum_{i<n_0} \frac{\varepsilon}{2^i \cdot 2 \cdot n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{n_0}\frac{n_0}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Este es un ejemplo muy importante que nos proporciona una métrica para el producto numerable de espacios métricos. El siguiente resultado depende fuertemente de él.

Teorema 9.3 (Urysohn)**.** *Un espacio regular X es segundo numerable si y sólo si X puede encajarse en* $[0,1]^\omega$.

Demostración. Sea X un espacio regular y segundo numerable. Puesto que todo espacio segundo numerable es un espacio de Lindelöf, por el Teorema 7.46 se sigue que X es un espacio normal.

Sea $\mathscr{B}$ una base numerable para la topología de X y sea

$$S = \{\langle U, V\rangle \in \mathscr{B} \times \mathscr{B} : \overline{U} \subseteq V\}.$$

Entonces S es numerable. Ahora para $s = \langle U, v\rangle \in S$ considere una función continua $f_s : X \to [0,1]$ tal que $f_s[\overline{U}] \subseteq \{0\}$ y $f[X \setminus V] \subseteq \{1\}$. Puesto que X es normal, el Lema de Urysohn garantiza que tales funciones f_s existen. Defina $\varphi : X \to [0,1]^S$ por $\varphi(x) =$

10
Compactaciones

Se ha visto en la segunda parte de este volumen cómo la compacidad es una propiedad muy fuerte de la topología de un espacio. Entre otras cosas permite tratar a un espacio con una cantidad infinita de puntos como si fuera un espacio finito (si se da un cierto grado de libertad). En este capítulo se estudia la posibilidad de agrandar a un espacio dado para lograr un espacio de Hausdorff y compacto:

Definición 10.1. Sea X un espacio no compacto. Una *compactación* de X es un espacio de Hausdorff que es compacto y que contiene a (una copia de) X como un subespacio denso.

Es decir, cuando un espacio no es compacto se quiere la posibilidad de agrandar el espacio agregando los puntos que le faltan para ser compacto, pero de manera tal que el espacio dado no se pierda en una inmensidad de otros nuevos puntos poco relacionados con el espacio original; o sea, se desea que el espacio original sea denso en el nuevo espacio.

Hay múltiples posibilidades; por ejemplo, el intervalo $[0,1]$ o S^1 son compactaciones de $\mathbb{R}$, como también lo son la cerradura en $\mathbb{R}^2$ de $\{\langle x, \sin(^1/_x)\rangle : x \in (0,1)\}$, o un segmento de recta enrollándose (infinitamente) alrededor de un círculo dado. El intervalo $[0,1]$ también es una compactación de $\mathbb{Q}$, el conjunto de Cantor es otra compactación de $\mathbb{Q}$. En fin, hay muchas maneras de compactar un espacio dado; bueno algunos espacios tienen una única compactación; ω_1 es uno de ellos.

La teoría de compactaciones es amplia. Aquí sólo se tratarán básicamente dos tipos de compactaciones. Otra cosa que se debe aclarar es que usualmente la manera en que el espacio está encajado en la compactación es importante. Aquí se está omitiendo esa parte porque para los dos tipos de compactaciones que serán tratadas es irrelevante. Sin embargo, si se considera $X = (0,1) \times \{0,1\}$ con su topología usual, entonces $K_0 = (S^1 \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\})$ y $K_1 = ([0,1] \times \{0\}) \cup (S^1 \times \{1\})$ son dos compactaciones de X que son homeomorfas, pero no equivalentes (para la mayoría de los autores).

Puede consultarse [En], [Ch], [CN] para ver mucha más información sobre compactaciones y de una manera más precisa.

10.1. Compactación por un punto

La forma más sencilla de compactar a un espacio es agregando sólo un punto; pero no todos los espacios tienen esa posibilidad. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ sí tiene compactaciones, pero no tiene una compactación por un punto. Otros espacios ni siquiera tienen compactaciones. Afortunadamente, todos los espacios importantes sí tienen.

Teorema 10.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un espacio X:*

(1) X es completamente regular.

(2) X se puede encajar en un cubo, $[0,1]^\kappa$.

(3) X es subespacio de un espacio de Hausdorff y compacto.

(4) X es subespacio de un espacio normal.

Este teorema es en realidad el Corolario 7.14; pero aquí se presenta nuevamente por su importancia para lo que se desarrolla en este capítulo. La implicación (1) $\Rightarrow$ (2) es de hecho el Teorema 5.13; el Teorema de Tychonoff que dice que los cubos son espacios compactos. Del Teorema 7.10 se obtiene la implicación (3) $\Rightarrow$ (4) y para cerrar el ciclo basta recordar que los espacios normales son completamente regulares (gracias al Lema de Urysohn) y ser completamente regular es una condición hereditaria.

Por lo tanto, los únicos espacios que tienen la posibilidad de tener una compactación son los espacios completamente regulares y de hecho todos esos espacios tienen una compactación, como se puede deducir del Teorema 10.2.

Teorema 10.3. *Para cualquier espacio de Tychonoff X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) El espacio X es localmente compacto.

(2) Para toda compactación K de X, el residuo $K \setminus X$ es cerrado.

(3) Hay una compactación K de X en la que X es abierto.

Nuevamente este teorema es un corolario de otro resultado antes presentado. Las implicaciones (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) son fáciles, la otra se sigue de la Proposición 7.30. Agregar un nuevo punto y hacer que el nuevo espacio sea de Hausdorff y compacto conlleva a que el espacio original deba ser abierto en su compactación. Así, los únicos espacios que tienen compactación por un punto son los espacios localmente compactos.

Bibliografía

[Ar] A. V. ARKHANGEL'SKIĬ. *Topological Function Spaces*. Kluwer Academic Publishers, 1992.

[Al] G. L. ALEXANDERSON. *About the cover: Euler and Königsbergs bridges: A historical view.* Bull. Amer. Math. Soc. 43 (2006) 567–573.

[AP] A. V. ARKHANGEL'SKII, V. I. PONOMAREV. *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises.* D. Reidel Publishing Company, 1984.

[Ch] R. E. CHANDLER. *Hausdorff Compactifications.* Marcel Dakker, Inc. 1976.

[CN] W. W. COMFORT, S. NEGREPONTIS. *The Theory of Ultrafilters.* Springer-Verlag, 1974.

[Di] J. J. DIJKSTRA. *On compactifications with path connected remainders.* Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008) 4461–4466.

[Do] E. K. VAN DOUWEN *Horrors of topology without AC: a nonnormal orderable space.* Proc. Amer. Math. Soc. 95 (1985) 101–105.

[DTW] A. DOW, F. D. TALL, W. A. R. WEISS. *New proofs of the consistency of the normal Moore space conjecture I.* Topology Appl. 37 (1990) 33–5.

[En] R. ENGELKING. *General Topology.* Heldermann Verlag, 1989.

[Fa] I. FARAH. *The fourth head of* $\beta\mathbb{N}$. En Open Problems in Topology II. Ed. E. Pearl. Páginas 135–142. Elsevier B. V., 2007.

[GTW] C. GOOD, I. J. TREE, S. WATSON *On Stone's theorem and the axiom of choice.* Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 1211—1218.

[GN] G. Gruenhage, P Nyikos *Introduction [Dedicated to the memory of Mary Ellen Rudin]*. Topology Appl. 195 (2015), 1—2.

[GJ] L Guillman, M. Jerison. *Rings of Continuous Functions*. Graduate Text in Mathematics 43, Springer-Verlag, 1960.

[He] F. Hernández Hernández. *Teoría de Conjuntos, una introducción*. Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, Vol. 13, 2017.

[HH] F. Hernández Hernández, M. Hrušák. *Topology of Mrówka-Isbell spaces*. En Pseudocompact Topological Spaces, Eds. Hrušák, Tamariz, Tkachenko. Páginas 245–280. Springer International Publishing AG, 2018.

[HI] F. Hernández Hernández, M. Ibarra Contreras. *Introducción a Teoría de la Medida*. Aportaciones Matemáticas, Textos, 2018.

[HR] P. Howard, J. E. Rubin. *Consecuences of the Axiom of Choice*. American Mathematical Soc., 1998

[Ir] I. L. Iribarren. *Topología de Espacios Métricos*. Limusa, 1973.

[Ke] J. L. Kelley *The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice*. Fund. Math.37 (1950) 75–76.

[vM] J. van Mill. *An Introduction to $\beta\omega$*. En Handbook of Set-Theoretic Topology, Eds. K. Kunen, J. E. Vaughan. Páginas 503–568. Elsevier Science Poblishers, 1984.

[MR] G. F. Morales, J. M. Roig. *Problemas de Topología General*. Alhambra, 1983.

[Mo] J. T. Moore. *A solution to the L space problem*. J. Amer. Math. Soc. 19 717–736, 2006.

[Mu] J. R. Munkres. *Topology: A First Course*. Prentice Hall, 1975.

[Na] J. Nagata. *Modern General Topology*. North-Holland, Segunda Edición, 1985.

[Ra] M. Raman-Sundström. *A pedagogical history of compactness*. Amer. Math. Monthly 122 (2015) 619-–635.

[Ro] J. Roitman. *Basic S and L*. En Handbook of Set-Theoretic Topology, Eds. K. Kunen, J. E. Vaughan. Páginas 295–326. Elsevier Science Poblishers, 1984.

[Ru] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis*. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976

[Si] T. B. SINGH. *Elements of Topology*. CRC Press, 2013.

[Sp] M. SPIVAK. *Calculus*. Publish or Peish, Inc., 2008 (cuarta edición).

[SS] L. A. STEEN, J. A. SEEBACH, JR. *Counterexamples in Topology*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1970.

[Tk] V. V. TKACHUK. *A C_p-Theory Problem Book*. Springer, 2011.

[Wi] S. WILLARD. *General Topology*. Dover Publications, Inc., 2004.

Índice analítico

Curso de topología. Un enfoque conjuntista, de la serie *Textos*
dentro de la colección *Aportaciones Matemáticas* editada por la
Universidad Nacional Autónoma de México, se terminó de
imprimir en agosto de 2021 en los talleres de
Gráficos Digitales Avanzados, S. A. de C. V. (Dataprint),
Georgia 181, Col. Nápoles, Alcaldía de Benito Juárez,
C.P. 03810, Ciudad de México
Tel 55 5672 3912, `schwartzmant@yahoo.com.mx`
Se tiraron 200 ejemplares en papel Bond blanco de 90 gramos,
encuadernación rústica y pegado Hot Melt en cartulina
sulfatada a 12 puntos con acabado en plastificado mate.
Se utilizaron en la composición las familias tipográficas
Utopia y *Mathdesign* a 10 puntos.
El cuidado de la edición estuvo a cargo de Leonardo Espinosa.

Apoyo técnico:

Instituto de Matemáticas, UNAM

Sección de Publicaciones
Helena Lluis, Pablo Rosell, Leonardo Espinosa, Celia Osorio

Sección de Difusión
Imelda Paredes, Gabriela Artigas, Victor Hugo Alcántara,
Lissette Martínez

Diseño de portada e interiores: Pablo Rosell González

PUBLICACIONES DEL
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MONOGRAFÍAS DEL INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

1 *Localization in non commutative rings.* B.J. Mueller (1975).
2 *Teoría de los números algebraicos.* A. Díaz-Barriga, A.I. Ramírez-Galarza, F. Tomás (1975).
3 *Integrales de medida positiva.* G. Zubieta (1976).
4 *Rings with polynomial identities.* B.J. Mueller (1977).
5 *Grupos profinitos, grupos libres y productos libres.* L. Ribes (1977).
6 *Introducción a la teoría de las clases características en la geometría algebraica.* A. Holme (1978).
7 *Embeddings, projective invariants and classifications.* A. Holme (1979).
8 *The relative spectral sequence of Leray-Serre for fibrations pairs.* C. Prieto (1979).
9 *Caminatas aleatorias y movimiento browniano.* D.B. Hernández (1981).
10 *On polarized varieties.* T. Matsusaka (1981).
11 *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones.* C. Cibils, F. Larrión, L. Salmerón (1982).
12 *Espacios simplécticos sobre β-anillos y anillos de Hermite, trasvecciones simplécticas.* E. Fernández Bermejo (1982).
13 *Abelian integrals.* G. Kempf (1983).
14 *On Selfinjective algebras of finite representation type.* J. Waschbüsch (1983).
15 *On ideal theory in Banach and topological algebras.* W. Zelazko (1984).
16 *Teoría general de procesos e integración estocástica.* T. Bojdecki (1985).
17 *La figura espectral de operadores.* C. Hernández Garciadiego, E. de Oteyza (1986).
18 *Teoría de punto fijo.* A. Dold. Traducción: C. Prieto. Vol. I, Vol. II, Vol. III (1986).
19 *Projective embeddings of algebraic varieties.* J. Roberts (1988).
20 *Teoría general de procesos e integración estocástica.* 2a. Edición. T. Bojdecki (1989).
21 *Análisis funcional I.* C. Bosch Giral, E. Fernández Bermejo (1989).
22 *Introducción a la topología de las variedades de dimensión infinita.* L. Montejano (1989).
23 *Introducción a la teoría de representaciones de álgebras.* R. Martínez-Villa (1990).

Memorias del 50 aniversario del Instituto de Matemáticas. 1942–1992.

Matemáticas en la UNAM. Memorias del 60 Aniversario del Instituto de Matemáticas. (2003).

Especulaciones y certezas en torno al futuro de la ciencia. Editado por C. Prieto, A.I. Ramírez-Galarza, J. A. Seade. 1a. Edición, (2019).

Topología algebraica. Un enfoque homotópico. M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto. Coedición de Instituto de Matemáticas, UNAM – McGraw-Hill Interamericana Editores (1998).

TEMAS DE MATEMÁTICAS PARA BACHILLERATO

1 *Cuando cuentes cuántos. . .* H. A. Rincón Mejía 1a. Reimpresión de la 2a. edición (2009).
2 *Sistemas de ecuaciones y de desigualdades.* A. I. Ramírez-Galarza. 1a. Reimpresión de la 1a. Edición (2008).
3 *La historia de un empujón: un vistazo a las ecuaciones diferenciales ordinarias y a los sistemas dinámicos.* L. Ortiz Bobadilla y E. Rosales González. 3a. reimpresión de la 1a. edición (2017).
4 *Dos o tres trazos.* S. Cárdenas Rubio. 2a. edición (2008).
(La nueva edición de este título se encuentra en la colección *papirhos*)
5 *Estadística descriptiva para bachillerato.* M. P. Alonso Reyes, J. A. Flores Díaz (2004).
6 *Relaciones de equivalencia.* M. Cruz Terán. (2006).
7 *Mosaicos.* L. Hidalgo. (2007).
8 *Funciones Circulares.* M. Cruz Terán. (2008).

PAPIRHOS

Serie: MIXBAAL

1 *Por la senda de los círculos.* C. Neve Jiménez, L. Rosales Ortiz. 1a. Edición (2017).

Serie: ICOSAEDRO

1 *Dos o tres trazos.* S. Cárdenas Rubio. 2a. Edición (2017).
2 *Cónicas, cuádricas y aplicaciones.* A. I. Ramírez-Galarza. 1a. Edición (2015).
3 *Concursos Nacionales de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas: 1987-2016.* J. A. Gómez Ortega, C. J. Rubio Barrios, R. Valdez Delgado. 1a. Edición (2019).

Serie: TEXTOS

1 *Grupos I.* D. Avella Alaminos, O. Mendoza Hernández, E. C. Sáenz Valadez, M. J. Souto Salorio. 3a. Edición (2017).
2 *Análisis Matemático.* M. Clapp. 3a. Edición (2019).
3 *Topología Diferencial.* V. Guillemin, A. Pollack. 1a. Edición (2015).
4 *Grupos II.* D. Avella Alaminos, O. Mendoza Hernández, E. C. Sáenz Valadez, M. J. Souto Salorio. 1a. Edición (2016).
5 *Geometría euclidiana bidimensional y su grupo de transformaciones.* M. Cruz López, M. García Campos. 1a. Edición (2017).
6 *Curso introductorio de Álgebra I.* D. Avella Alaminos, G. Campero Arena. 1a. Edición (2017).
7 *Clases características.* J. Milnor, J. Stasheff. 1a. Edición (2017).
8 *Introducción a la teoría de Galois.* F. Zaldívar. 1a. Edición (2018).
9 *Introducción al álgebra lineal.* F. Zaldívar. 1a. Edición (2019).
10 *Curso introductorio de Álgebra II.* D. Avella Alaminos, G. Campero Arena, E. C. Sáenz Valadez. 1a. Edición (2021).
11 *Curso breve de geometría proyectiva.* F. Cano Torres, B. Molina-Samper, F. Sanz Sánchez. Prólogo histórico de J.M. Aroca Hernández-Ros. 1a. Edición (2021).

Serie: NOTAS

1 *Teoría de singularidades en topología, geometría y foliaciones I.* Editado por L. Ortiz Bobadilla, J. Snoussi. 1a. Edición, (2017).
2 *Teoría de singularidades en topología, geometría y foliaciones II.* Editado por L. Ortiz Bobadilla, J. Snoussi. 1a. Edición, (2017).
3 *Teoría de las gráficas. Algunas aportaciones desde México.* Editado por J.A. Fresán, I.A. Goldfeder, N. Javier, R. Zuazua. 1a. Edición, (2021).

Serie: ACTAS

1 *Proceedings of the 2018 Workshop on Holomorphic Dynamics.* Editado por P. Domínguez, P. Makienko, C. Cabrera. 1a. Edición, (2019).

CUADERNOS DE OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS

1 *Combinatoria.* M. L. Pérez-Seguí. 1a. Reimpresión de la 2a. edición (2021).
2 *Principios de olimpiada.* A. Illanes Mejía. 1a. Reimpresión de la 2a. edición (2021).
3 *Geometría.* R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega. 2a. reimpresión de la 2a. edición (2019).
4 *Geometría. Ejercicios y problemas.* R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega. 2a. edición (2016).
5 *Teoría de números.* M. L. Pérez-Seguí. 2a. edición (2016).
6 *Desigualdades.* R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. 5a. edición (2016).
6a *Inequalities.* R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega 1a. edición (2005). (Traducción del libro “Desigualdades").
7 *Olimpiadas en SLP, elemental.* R. Bulajich, C. J. Rubio 2a. edición (2016).
8 *Olimpiadas en SLP, avanzado.* R. Bulajich, C. J. Rubio 2a. edición (2017).
9 *Matemáticas preolímpicas.* M. L. Pérez-Seguí. 1a. reimpresión de la 2a. edición (2019).
10 *Combinatoria para olimpiadas internacionales.* P. Soberón. 2a. edición (2017).
11 *Problemas avanzados de olimpiada.* A. Alberro, R. Bulajich, C. J. Rubio 1a. edición (2019).
12 *Combinatoria avanzada.* M. L. Pérez-Seguí. 1a. edición (2019).

13 *Principio de las casillas.* J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. 3a. edición (2017).
14 *Álgebra.* R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. 2a. reimpresión de la 3a. edición (2021).
15 *Problemas de geometría para olimpiadas de Secundaria.* J. A. Gómez Ortega, O. Rivera Bobadilla, H. Villanueva Méndez. 1a. edición (2019).

APORTACIONES MATEMÁTICAS

Serie: INVESTIGACIÓN

1 *Coloquio de sistemas dinámicos. Memorias. Guanajuato, México, 1983.* Editado por J.A. Seade, G. Sienra (1985).
2 *Categorical topology - The complete work of Graciela Salicrup.* Edited by H. Herrlich, C. Prieto (1988).
3 *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies.* X. Gómez-Mont, L. Ortíz-Bobadilla. 2a. edición (2004).
4 *Simposio de probabilidad y procesos estocásticos. Memorias. Guanajuato, México 1988.* Editado por M.E. Caballero, L.G. Gorostiza (1989).
5 *Topics in algebraic geometry. Proceedings. Guanajuato, México 1989.* Editado por L. Brambila-Paz, X. Gómez-Mont (1992).
6 *Seminario internacional de álgebra y sus aplicaciones. Memorias. México 1991.* Editado por L.M. Tovar, C. Rentería, R.H. Villarreal (1992).
7 *II Simposio de probabilidad y procesos estocásticos. I Encuentro México-Chile de análisis estocástico. Memorias. Guanajuato, México 1992.* Editado por M.E. Caballero, L.G. Gorostiza (1992).
8 *Taller de geometría diferencial sobre espacios de geometrías. Memorias. Guanajuato, México 1992.* Editado por L. del Riego, C.T.J. Dodson (1992).
9 *Poblaciones aleatorias ramificadas y sus equilibrios.* A. Wakolbinger (1994).
10 *Una Introducción a la geometría computacional a través de los teoremas de la galería de arte.* V. Estivill-Castro (1994).
11 *III Simposio de probabilidad y procesos estocásticos. Memorias. Hermosillo, México 1994.* Editado por M.E. Caballero, L.G. Gorostiza (1994).
12 *IV Simposio de probabilidad y procesos estocásticos. Memorias. Guanajuato, México 1996.* Editado por L.G. Gorostiza, J.A. León, J.A. López-Mimbela (1996).
13 *Taller de variedades abelianas y funciones theta. Memorias. Morelia, Mich., México 1996.* Editado por R. Rodríguez, J.M. Muñoz Porras, S. Recillas (1998).
14 *Modelos estocásticos.* Editado por J. M. González Barrios, L. G. Gorostiza (1998).
15 *Inverse limits.* W.T. Ingram (2000).
16 *Modelos Estocásticos II.* Editado por D. Hernández, J.A. López-Mimbela, R. Quezada (2001).
17 *Topics in infinitely divisible distributions and Lévy processes.* A. Rocha-Arteaga, K. Sato (2003).
18 *Parametric Optimization and Related Topics VII.* Editado por J. Guddat, H.Th. Jongen, J.-J. Rückmann, M. Todorov (2004).
19 *Continuum Theory: in Honor of Professor David P. Bellamy on the occasion of this 60th Birthay.* Edited by I. W. Lewis, S. Macías, S. B. Nadler, Jr. (2007).
20 *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Fibonacci Numbers and ther Applications.* Editado por Florian Luca, Pantelimon Stănică (2011).

Serie: COMUNICACIONES

1 *Programa de investigación del XVIII congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Mérida, México 1984.* Editadas por M. Clapp, J.A. Seade (1986).
2 *Teoremas límite de alta densidad para campos aleatorios ramificados.* B. Fernández (1986).
3 *Programa del XIX congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol. I. Memorias. Guadalajara, México 1986.* Editadas por J.A. de la Peña, C. Prieto, G. Valencia, L. Verde (1987).
4 *Programa del XIX congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol. II. Memorias. Guadalajara, México 1986.* Editado por J.A. de la Peña, C. Prieto, G. Valencia, L. Verde (1987).
5 *Programa del XX congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Xalapa, México 1987.* Editado por M.A. Aguilar, L. Salmerón, C. Vargas (1988).
6 *XXI Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Hermosillo, Sonora 1988.* Editado por F. Aranda, J. Bracho, A. Sánchez Valenzuela, A. Vargas (1989).
7 *Breve introducción a códigos detectores-correctores de error.* C. Rentería, H. Tapia, W.Y. Vélez (1990).
8 *XXII Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Puebla, Puebla 1989.* Editado por P. Barrera, A. Illanes, F. O'Reilly, S. Recillas (1990).

9 *XXIII Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Guanajuato, México 1990.* Editado por A. García-Máynez, L.G. Gorostiza, J. Ize, M. Mendoza (1991).
10 *La estructura de los dendroides suaves.* S. Macías Alvarez (1993).
11 *XXIV Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Oaxtepec, Morelos 1991.* Editado por O. Hernández, L. Montejano, B. Rumbos, A.A. Wawrzyñzyk (1992).
12 *XXV Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. I. Memorias. Xalapa, Veracruz 1992.* Editado por F. Larrión, A. Olvera, V. Pérez-Abreu, E. Vallejo (1993).
13 *XXV Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. II. Memorias. Xalapa, Veracruz 1992.* Editado por F. Larrión, A. Olvera, V. Pérez-Abreu, E. Vallejo (1993).
14 *XXVI Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Morelia, Mich. 1993.* Editado por M.E. Caballero, J. Delgado, A.G. Raggi, J. Rosenblueth (1994).
15 *XI Escuela Latinoamericana de Matemáticas. Memorias. UNAM, México, D.F.; CIMAT, Gto. 1993.* Editado por X. Gómez-Mont, J.A. de la Peña, J.A. Seade (1994).
16 *XXVII Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Querétaro, Qro. 1994.* Editado por J.A. León, A. Nicolás, F. Ongay, A. Tamariz (1995).
17 *Grupo de estudio con la industria y cursos en matemáticas industriales. Memorias. Oaxaca, Oaxaca 1995.* Editado por A. Fitt, R. Martínez-Villa (1996).
18 *XXVIII Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Colima, Colima 1995.* Editado por J.L. Morales Pérez, S. Pérez Esteva, F. Sánchez Bringas, G. Villa Salvador (1996).
19 *Problemas combinatorios sobre conjuntos finitos de puntos.* B.M. Ábrego Lerma (1997).
20 *XXIX Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. San Luis Potosí, SLP 1996.* Editado por F. Avila Murillo, R. Montes-de-Oca, R. del Río Castillo, J. Muciño-Raymundo (1997).
21 *IV Escuela de verano de geometría y sistemas dinámicos. Memorias. Cimat, Guanajuato 1997.* Editado por O. Calvo, R. Iturriaga (1998).
22 *XXX Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Aguascalientes, Ags. 1997.* Editado por A. López Mimbela, M. Neumann, M. Rzedowski, M. Shapiro (1998).
23 *Segundo grupo de estudio con la industria y cursos en matemáticas industriales. Memorias. Cocoyoc, Mor., México. 1997.* Editado por A. Fitt, R. Martínez-Villa, H. Ockendon (1999).
24 *3rd. International conference on approximation and optimization in the Caribean. Proceedings. Puebla, México. 1995.* Editado por B. Bank, J. Bustamante, J. Guddat, M. A. Jiménez, H. Th. Jongen, W. Römisch (1998).
25 *XXXI Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Hermosillo, Son. 1998.* Editado por P. Padilla, R. Quiroga, C. Signoret, A. Soriano (1999).
26 *Tendencias interdisciplinarias de las matemáticas.* Editado por S. Gitler, C. Prieto (2000).
27 *XXXII Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Guadalajara, Jal. 1999.* Editado por L. Hernández Lamoneda, R. Quezada, J. Martínez Bernal, H. Sánchez Morgado (2000).
28 *Lecturas Básicas en Topología General.* Editado por L. M. Villegas, A. Sestier, J. Olivares (2000).
29 *XXXIII Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Saltillo, Coah. 2000.* Editado por J. Alfaro, M. Eudave, J. González Espino-Barros, E. Pérez Chavela (2001).
30 *XXXIV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Toluca, Méx. 2001.* Editado por G. Contreras, C. Rentería, E. R. Rodríguez, C. Villegas Blas (2002).
31 *Tópicos de Geometría Algebraica.* Editado por L. Brambila, P. L. del Angel, A. García Zamora, J. Muciño (2002).
32 *XXXV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Durango, Dgo. 2002.* Editado por M. Aguilar, R. Quiroga (2003).
33 (Número cancelado.)
34 *XXXVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Pachuca, Hgo. 2003.* Editado por M. Aguilar, R. Quiroga (2004).
35 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, R. Quiroga (2005).
36 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, R. Quiroga (2006).
37 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2007).
38 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2008).
39 *Modelos en estadística y probabilidad.* Editado por J. M. González-Barrios, J. A. León, A. Pérez, L. A. Rincón, J. Villa (2008).
40 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2009).
41 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2010).
42 *Las matemáticas a través de los 50 años de la ESFM del IPN.* Editado por Lino Feliciano Reséndis, Luis Manuel Tovar (2011).
43 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2011).
44 *Modelos en estadística y probabilidad II.* Editado por J. M. González-Barrios M., J. A. León Vázquez, J. Villa Morales (2011).
45 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2012).

46 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2013).
47 *Modelos en estadística y probabilidad III.*
Editado por J. M. González-Barrios M., J. A. León Vázquez, J. Villa Morales, R. A Navarro Cruz (2014).
48 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2014).
49 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2015).
50 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2016).
51 *Modelos en estadística y probabilidad IV.*
Editado por J. Álvarez Mena, J. M. González-Barrios M., J. A. León Vázquez, R. A López Martínez (2017).

Serie: TEXTOS

1 *Introducción a la topología – Graciela Salicrup.*
Editado por J. Rosenblueth, C. Prieto. Nivel medio. 1a. Reimpresión (1997).
2 *Procesos estocásticos.* C. Tudor. Nivel avanzado. 3a. Edición (2002).
3 *Lectures on continuous-time Markov control processes.* O. Hernández-Lerma. Nivel avanzado (1994).
4 *Un curso de lógica matemática.* C.R. Videla. Nivel avanzado (1995).
5 *Rudimentos de mansedumbre y salvajismo en teoría de representaciones.* F. Larrión, A. G. Raggi, L. Salmerón. Nivel avanzado (1995).
6 *Teoría general de procesos e integración estocástica.* T. Bojdecki. Nivel avanzado. 1a. Reimp. (2004).
7 *Intersection theory.* S.X. Descamps. Nivel avanzado (1996).
8 *Inverse problems.* H.W. Engl. Nivel avanzado (1996).
9 *El ABC de los splines.* P. Barrera, V. Hernández, C. Durán. Nivel elemental (1996).
10 *Lo antiguo y lo nuevo acerca de los conjuntos convexos.* H. Hadwiger. Traducción: L. Montejano. Nivel medio (1998).
11 *Matemáticas para las ciencias naturales.* J.L. Gutiérrez Sánchez, F. Sánchez Garduño. Niveles medio y avanzado (1998).
12 *Introducción a la teoría de redes.* M.C. Hernández Ayuso. Nivel medio 1a. Edición (2020).
13 *Teoría de conjuntos (una introducción).* F. Hernández Hernández. Nivel medio 2a. Edición (2019).
14 *Lectures on quantum probability.* A. M. Chebotarev. Nivel avanzado (2000).
15 *Construcción de procesos autosimilares con variancia finita.*J.E. Figueroa López.Nivel avanzado (2000).
16 *Grupos algebraicos y teoría de invariantes.* C. Sancho de Salas. Nivel avanzado (2001).
17 *Cohomología de Galois de campos locales.* F. Zaldívar. Nivel avanzado (2001).
18 *Dimension Theory: An Introduction with Exercises.* S. B. Nadler, Jr. Nivel avanzado (2002).
19 *Cómputo Numérico con aritmética de punto flotante IEEE. Con un teorema, una regla empírica y ciento un ejercicios.* M. L. Overton. Traducción: A. Casares Maldonado. Nivel medio (2002) Coedición SIAM.
20 *Topología diferencial.* V. Guillemin, A. Pollack. Traducción: O.Palmas Velasco. Nivel medio (2003).
(La nueva edición de este título se encuentra en la colección *papirhos*)
21 *Elementos de Probabilidad y Estadística.* A. Hernández-del-Valle, O. Hernández-Lerma. Nivel elemental (2003).
22 *Topología General.* D. Hinrichsen, J. L. Fernández Muñiz, A. Fraguela Collar, Á. Álvarez Prieto. Nivel medio (2003).
23 *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones.* S. de Neymet U. Con la colaboración de R. Jiménez B. Nivel avanzado (2005).
24 *Breviario de teoría analítica de los números.* E. P. Balanzario. Nivel medio 1a. Reimpresión (2009) Coedición Reverté.
25 *Cálculo de probabilidades.* F. M. Hernández Arellano. Nivel elemental (2003).
26 *Números primos y aplicaciones.* F. Luca. Nivel avanzado (2004).
27 *Historia y desarrollo de la teoría de los continuos indescomponibles.* F.L. Jones. Traducción: S. Macías.
Nivel medio (2004).
28 *Hiperespacios de continuos.* A. Illanes. Nivel medio (2004).
29 *Cadenas de Markov.* M. E. Caballero, N. S. Hérnández, V. M. Rivero, G. Uribe Bravo, C. Velarde.
Nivel medio 1a. Edición (2017).
30 *The fixed point property for continua.* S. B. Nadler, Jr. Nivel avanzado (2005).
31 *Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios.* Editado por R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez.
Nivel medio (2006).
32 *Introducción a la teoría de grupos.* F. Zaldívar. Nivel medio 1a. Edición (2018).
33 *Hyperspaces of sets. A text with research questions.* S. B. Nadler, Jr. Nivel avanzado (2006).
34 *Introducción a la optimización no lineal.* E. Accinelli. Nivel avanzado (2009). Coedición Reverté.
35 *Graphs, rings and polyhedra.* I. Gitler, R. H. Villarreal. Nivel avanzado (2011).
36 *Introducción a la topología de conjuntos.* A. García Máynez. Nivel elemental (2011).
37 *Elementos de topología general.* F. Casarrubias Segura, A. Tamariz Mascarúa.
Nivel medio 1a. edición (2019).

38 *Cálculo.* H. Arizmendi, A. Carrillo, M. Lara. Nivel elemental 2a. edición (2016).
39 *Curso elemental de probabilidad y estadística.* Luis Rincón. Nivel elemental 1a. Edición (2013).
40 *Álgebras booleanas y espacios topológicos.* R. Pichardo, Á. Tamariz. Nivel avanzado 1a. Edición (2017).
41 *Introducción a la teoría de probabilidad y métricas probabilísticas con aplicaciones en seguros y finanzas.* E. I. Gordienko, X. I. Popoca-Jiménez. Nivel medio 1a. Edición (2018).
42 *Introducción a la teoría de la medida.* F. Hernández Hernández, M. Ibarra Contreras. Nivel medio 1a. Edición (2018).
43 *Curso de topología (un enfoque conjuntista).* F. Hernández Hernández. Nivel medio 1a. Edición (2021).

Alberto Barajas: Su oratoria, sus matemáticas y sus enseñanzas.
Edición: V. Neumann-Lara, I. Puga, S. Macías (2010) 346 p. Contiene 2 DVD.

PUBLICACIONES DEL INSTITUTO DE MATEMÁTICAS EN COLABORACIÓN CON LA AMS

Contemporary Mathematics

260 *First summer school in analysis and mathematical physics. Cuernavaca, Morelos, 1998.* Editado por S. Pérez-Esteva, C. Villegas-Blas. Contemporary Mathematics No. 260. Coedición de Aportaciones Matemáticas – American Mathematical Society (2000).
289 *Second summer school in analysis and mathematical physics. Cuernavaca, Morelos, 2000.* Editado por S. Pérez-Esteva, C. Villegas-Blas. Contemporary Mathematics No. 289. Coedición de Aportaciones Matemáticas – American Mathematical Society (2001).
336 *Stochastic Models.* Editado por J. M. González-Barrios, J. A. León, A. Meda. Contemporary Mathematics No. 336. Coedición de Aportaciones Matemáticas – American Mathematical Society (2003).
340 *Spectral Theory of Schrödinger Operators. Lecture Notes from a Workshop on Schrödinger Operator Theory. IIMAS, UNAM, Mexico, 2001.* Editado por R. del Río, C. Villegas-Blas. Contemporary Mathematics No. 340 Coedición de Aportaciones Matemáticas – American Mathematical Society (2004).
341 *Topological algebras and their applications. Fourth International Conference on Topological Algebras and Their Applications. Oaxaca, Mexico, 2002.* Editado por H. Arizmendi, C. Bosch, L. Palacios. Contemporary Mathematics No. 341. Coedición de Aportaciones Matemáticas – American Mathematical Society (2004).
389 *Geometry and Dynamics International Conference in Honor of the 60th Anniversary of Alberto Verjovsky. January 6-11, 2003. Cuernavaca, Mexico.* Editado por J. Eells, E. Ghys, M. Lyubich, J. Palis, J. Seade. Contemporary Mathematics No. 389. Coedición de Aportaciones Matemáticas – American Mathematical Society (2005).
476 *Fourth summer school in analysis and mathematical physics. Topics in Spectral Theory and Quantum Mechanics. Cuernavaca, Morelos, 2005.* Editado por C. Villegas-Blas. Contemporary Mathematics No. 476. Coedición de Aportaciones Matemáticas – American Mathematical Society (2008).

Información y pedidos:

Sección de Publicaciones
Instituto de Matemáticas, UNAM, Circuito Exterior
Ciudad Universitaria, 04510 Ciudad de México, MÉXICO
tel: +52 55 5622-4496 y 4545
e-mail: papirhos@im.unam.mx
e-mail: librosdemate@im.unam.mx
web: http://papirhos.matem.unam.mx/

papirhos.matem.unam.mx